XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Un análisis en libros de texto sobre la división de polinomios

Silvia **Caronía**
silvca2@gmail.com
Graciela **Sklepek**
sklepek.g@hotmail.com
Norma **Martyniuk**- Edith **Abildgaard** –Marta **Rivero** – Roxana **Operuk**- Jorge **Manzur**
Facultad de Ciencias Exactas Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones
Argentina
Nora **Verdún**
Instituto Posadas 0403
Argentina

Resumen

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación[1] y se enmarca dentro de la Teoría Antropológica Didáctica. En él se presentan una serie de reflexiones originadas como resultado del análisis del “saber a enseñar” de las propuestas en libros de texto de nivel secundario, sobre el tema *división de polinomios.*

Surge como inquietud acerca de cómo llegan dichos contenidos al aula, teniendo en cuenta que la transposición didáctica de los conocimientos académicos que realizan los autores es una temática de importancia, teniendo en cuenta que los libros son los mediadores más influyentes entre el diseño curricular y la práctica docente en el aula.

De las observaciones realizadas se pudo concluir que los autores realizan diferentes interpretaciones en relación a un contenido en particular y a la forma de presentarlo, además se delega un considerable trabajo bajo la responsabilidad del lector, al dejar cuestiones a ser resueltas por éste.

Palabras claves: Transposición didáctica, Praxeología, división de polinomios.

---

[1] Proyecto de investigación 16Q377, del Consejo de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CIDeT), Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones. Argentina.

Introducción

Polinomios es un contenido tradicional de la escuela secundaria Argentina, que ha sido considerado durante un largo período como un contenido fundamental, tanto en los distintos Diseños Curriculares como en los libros de texto, además de ser un tema presente en la mayoría de los programas de ingreso a la Educación Superior.

Al igual que otros, este tema presenta dificultades a la hora de su tratamiento, hecho reflejado en numerosas investigaciones, Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Bolea, Bosch y Gascón (2004) dan cuenta de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de este concepto, en los distintos niveles del sistema educativo. Otros, como Quintero, Ruiz y Terán (2005) manifiestan que se genera cierta incertidumbre en los docentes, frente al desconocimiento de las razones de ser de ciertos conocimientos a ser enseñados, citando entre ellos a los polinomios.

Preocupados por esta problemática, en el año 2009 iniciamos un proyecto de investigación referido al objeto “polinomio”, con el objetivo de contribuir a la búsqueda de respuestas a ésta situación. En un primer avance de la investigación, se pudo observar desde el aspecto Epistemológico e Histórico que, desde la antigüedad los polinomios aparecen de manera implícita en la resolución de ecuaciones, mientras que su expresión formal tiene raíces en el álgebra abstracta mucho tiempo después (siglo XVII).

Al profundizar en el estudio matemático de los mismos, se consideró importante ampliar la mirada hacia otros conocimientos como ecuaciones y funciones polinómicas, por cuanto nuestro objeto primitivo, está estrechamente vinculado a los mismos en el ámbito de la institución escolar.

En esta presentación se hace referencia al análisis del “saber a enseñar” en libros de texto de nivel secundario, centrado exclusivamente en la división de polinomios, bajo la concepción de que los libros de textos son las interpretaciones y traducciones del autor con respecto a los Diseños Curriculares y orientaciones didácticas.

Marco Teórico

La Teoría de la Transposición Didáctica de Yves Chevallard, básicamente enuncia que, los contenidos o conocimientos que se enseñan en la escuela no son generados en ella ni para ella, sino en otros sitios (o instituciones) de la sociedad (noosfera) y que “se lleva” o “transpone” a la escuela por necesidades sociales de educación y difusión” (Bosch y Gascón, 2003). Es en este lugar donde se imponen una serie de condiciones y restricciones sobre el tipo de enseñanza de un determinado conocimiento en la institución escolar, el por qué de la inclusión a enseñar en la escuela, en qué contextos y problemáticas se inscribe, la importancia dentro de la currícula, los fundamentos de la permanencia de los mismos en los dispositivos curriculares, las propuestas de libros de texto. La limitación se presenta cuando el trabajo transpositivo no es capaz de sostener o de recrear alguna posible razón de ser para el conocimiento que se desea que la escuela transmita.

Como consecuencia del desarrollo de la transposición didáctica surge la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992). La misma se inscribe dentro del marco general de la didáctica fundamental, y propugna, como lo menciona Gascón (1998, Pág. 11), “que la actividad matemática debe ser considerada (esto es, modelizada) como una actividad humana en lugar de considerarla únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo.”

La Praxeología Matemática u Organización Matemática es la herramienta que permite modelizar en detalle las actividades matemáticas. Sus componentes fundamentales son por un lado: las *Tareas,* que son las cuestiones problemáticas presentadas y las *Técnicas* que, son una manera de realizar dichas *Tareas*, ambas conforman el bloque de la “praxis”. Por otro lado la *Tecnología,* que es el discurso racional sobre la *Técnica* y la *Teoría que* es el argumento formal que justifica en última instancia a la *Tecnología*, ambas conforman el bloque del “logos” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Metodología

El presente trabajo se enmarca dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y se utiliza la praxeología matemática como herramienta para analizar libros de textos del nivel secundario.

La metodología de investigación utilizada es de tipo cualitativa, caracterizada metodológicamente por el énfasis exploratorio, descriptivo e interpretativo. Las principales técnicas utilizadas son observación y análisis.

Los instrumentos que se utilizan son “libros de textos” del nivel secundario correspondiente a tercer año (1998) y 2º año polimodal (2003).

Analizar libros de texto, contribuye a aproximarnos a la idea de una parte del funcionamiento del sistema educativo en relación con un conocimiento en particular, en este caso: la división de polinomios. Para ello se describe en líneas generales la presentación que realizan los autores sobre el tema, de las actividades propuestas para ser resuelta por el alumno se indaga ¿cuáles son las técnicas asociadas a la división de polinomios?, ¿si lo desarrollado por el autor permite la resolución de los ejercicios propuestos?, ¿cuál es el orden y qué cuestiones encaran los autores sobre la operación?

Para la selección de los textos se tomó como criterio escoger aquellos que permitieran una exploración más fecunda sobre los aspectos teóricos, la presentación y secuenciación de los contenidos. Se consideró prescindible identificar sus títulos y autores, simplemente se los mencionará con la asignación de un número.

¿Cómo presentan los autores a la división de polinomios?

Libro 1

División de Polinomios. Bajo el título “División de Polinomios”, el autor comienza recordando la definición de división entera entre dos números y las condiciones que deben cumplirse:

- el dividendo debe ser igual al producto entre el divisor y el cociente más el resto
- el resto debe ser mayor o igual a cero y menor que el divisor

A través de un ejemplo numérico muestra la técnica de la división entera (desarrolla la disposición práctica de la cuenta).

En forma análoga a la división de enteros, trabaja con la división entre polinomios, mencionando las condiciones que deben cumplirse:

"P=Q.C+R (el dividendo debe ser igual al producto entre el divisor y el cociente más el resto) y gr R< gr Q o bien R es el polinomio nulo".

La presentación del algoritmo lo hace a través de un ejemplo, señalando la "disposición" de los polinomios dividendo divisor el procedimiento de la división.

Al margen explica parte del procedimiento expuesto, expresa en forma coloquial y va señalando simbólicamente las partes del ejemplo presentado:

- Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor
- Se multiplica el resultado encontrado por cada término del divisor
- Se resta al dividendo el resultado del producto obtenido anteriormente o bien se suma el opuesto de dicho producto
- Se repite los pasos anteriores hasta lograr que el grado del resto sea menor que el del divisor.

Teniendo en cuenta esta presentación, nos preguntamos si el lector estará en condiciones de comprender, entre otras cuestiones, ¿cuál es la definición de división de polinomios? ¿Por qué la analogía entre la división de números enteros y la división de polinomios?.

Se observa que la condición para efectuar la división, de que el grado del divisor debe ser menor o igual al grado del dividendo se encuentra en forma implícita. Por otra parte, no se menciona en ningún momento sobre la conveniencia de que el polinomio dividendo esté completo y ordenado en forma decreciente.

Bajo el subtítulo "Una aplicación curiosa" el autor presenta un ejemplo de analogía entre la división de números enteros y la misma división expresada como descomposición polinómica, con la intención de ayudar a "comprender" la división entre polinomios, como una técnica semejante a la de números enteros. Compara resultados, llegando a la conclusión que son coincidentes.

Ahora bien, ¿es posible a partir de un solo ejemplo dar por válida esta analogía para cualquier par de números y su respectiva descomposición polinómica? , es decir, ¿es lo mismo dividir dos números enteros, que dividir esos números expresados por su descomposición polinómica?. En ningún momento se abre la duda, hecho que puede llevar a una conclusión errónea teniendo en cuenta que basta probar con diferentes números, para comprobar que no todos los números enteros permiten "mostrar" la analogía enunciada por el autor. Por ejemplo (5048: 24)

$5.10^3 + 0.10^2 + 4.10 + 8 : 2.10+4 = \frac{5}{2}.10^2 - 5.10 + 12 \quad Resto = -40 \qquad 5048:24=201 \quad \text{Resto}= 8$

Para continuar el trabajo, el autor propone una serie de actividades a ser resueltas por el lector. El análisis de las mismas a través de la TAD nos ha permitido identificar conceptos involucrados, posibles razonamientos y procedimientos, aspectos que no se tuvieron en cuenta en el desarrollo del tema y que podrían obstaculizar la resolución correcta de lo propuesto, entre otros.

<u>Ejercicio A:</u> siendo el dividendo $4x^3$-$2x^2$+6x-2 y el divisor x^2+x-1. Verificar mediante la división de polinomios que R=16x-8 y C=4x-6 son el resto y el cociente respectivamente.

Tarea: verificar la división de polinomios

Técnica 1:

- Escribir la definición de la división entre polinomios, reemplazar por los datos dados
- Realizar las operaciones de producto y suma de polinomios
- Verificar la igualdad entre polinomios

Tecnología 1

- Definición de división entre polinomios
- Propiedades de los números reales
- Definición de igualdad entre polinomios

Técnica 2: Aplicar el algoritmo de la división entre polinomios y comparar el cociente y el resto con los dados en el enunciado del problema

Tecnología 2: Definición de división entre polinomios

En este ejercicio el lector debe proceder a la verificación y comprobación de la igualdad entre polinomios, concepto que no ha sido desarrollado en ningún momento.

Se puede evidenciar que la definición de la división y sus condiciones, el autor las utiliza como "verificación de una cuenta". Este ejercicio corresponde al utilizado en la explicación del algoritmo de la división, lo que hace más evidente la intención de la idea de verificación.

<u>*Ejercicio B:*</u> *A un alumno de 3er. Año le piden que realice P:Q siendo P=2x-1 y Q=x^2. Corrijan lo realizado por este alumno:*

$$\begin{array}{r|l} 2x-1 & x^2 \\ \cline{2-2} \underline{-2x} & \\ -1 & 2x^{-1} \end{array}$$

(Sugerencia: relean la definición de polinomios)

Tarea: corregir la división realizada

Técnica:

- aplicar el algoritmo de la división
- verificar la definiciones de: división y de polinomios

Tecnología:

- Definición de división entre polinomios
- Definición de polinomios

La expresión "corrijan lo realizado por este alumno" advierte al lector que lo presentado no es correcto, limita las respuestas espontáneas e induce al alumno cuando hace la "sugerencia", a prestar especial atención sobre aspectos a tener en cuenta en la definición de división de polinomios que "conducen" a la respuesta correcta, perdiendo la posibilidad de análisis de las condiciones de la división entre polinomio.

Ejercicio C: ¿qué condición debe cumplirse para que pueda efectuarse P: Q?

Tarea: analizar la condición para dividir dos polinomios

Técnica: Comparar las divisiones resueltas en los ejemplos desarrollados por el autor y el dado en el ejercicio B.

Tecnología: Definición de división entre polinomios

Se supone que el autor pretende conducir a la conclusión de que el grado del dividendo, debe ser mayor o igual que el grado del divisor, para que la división sea posible, ya que en la presentación de la definición de división aduce que "trataremos de determinar, cuando sea posible dos polinomios C (cociente) y R (resto) que cumplan con las siguientes condiciones". Lo que se infiere de dicha manifestación es que no siempre se puede dividir dos polinomios.

Ejercicio D: Completen:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 5x - 8 & \\ \hline -15x - 6 & 3x^2 + 5x + 1 \end{array}$$

Tarea: Conocidos Dividendo, Cociente y Resto, hallar el divisor.

Técnica 1: Para encontrar el divisor se utiliza el algoritmo de la división, se puede deducir que el primer término del divisor es $1x^2$ porque al multiplicar por el primer término del cociente se obtiene el primer término del dividendo $3x^4$, después de este cálculo no es posible seguir aplicando dicho algoritmo.

Técnica 2: Por la definición de división de polinomios se tiene: P=Q. C+R**,** donde el grado del resto debe ser de grado menor que el divisor; el grado del cociente, sumado al grado del divisor, debe dar el grado del dividendo, por lo tanto el grado del divisor es 2, y al sumar con el resto se obtiene el grado 4 del dividendo.

$$3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 5x - 8 = (3x^2 + 5x + 1).Q + (-15x - 6)$$

Para la búsqueda del divisor se plantea la siguiente igualdad (P-R): C=Q, encontrándose una "nueva" división, que al resolverla no es exacta. ¿Qué condiciones debe cumplirse para que pueda encontrarse el divisor? (P-R) debe ser un múltiplo del cociente, en este caso no se verifica. Por lo tanto no existe el divisor buscado.

Tecnología 1 y 2: Definición de división entre polinomios

El ejercicio D se presenta bajo la forma del esquema del algoritmo, lo que llevaría a pensar en la cuenta, sin embargo esta técnica encuentra su limitación cuando se pretende determinar los demás términos del divisor. La consigna de completar induce a pensar en la idea de existencia del polinomio divisor, hecho que conduce a la búsqueda de otra manera de obtener el mismo.

El análisis realizado de este libro nos lleva a considerar que en la presentación efectuada sobre la división de Polinomios, tanto en los ejercicios que muestra y los que propone, termina quedando oculta la expresión: [P(x)= C(x).Q(x)+R(x)], utilizándose solo como "verificación" de una cuenta, lo que dificultaría encontrar la solución de determinados ejercicios, tales como el ejercicio D.

Regla de Ruffini. Si bien la regla de Ruffini es uno de los métodos para dividir polinomios en los que el divisor tiene determinada característica, se ha podido observar que la presentación de la misma se encuentra a continuación de la división de polinomios con un título importante como si fuera un tema independiente.

El autor comienza con la aclaración: “con frecuencia es necesario dividir polinomios donde el divisor es de la forma x+a”.

Enuncia las propiedades del Resto:

“El resto de la división de un polinomio B por x-a es igual a B(a), siendo B(a) el valor de la función B(x) para x= a”.

“Al dividir dividendo y divisor por un número a distinto de cero, el cociente será el mismo pero el resto quedará dividido por el mismo número a”

Luego compara la propiedad del resto y la regla de Ruffini, concluyendo que esta última es la más económica (menos operaciones a realizar) para obtener el resto de una división.

Conforme a la presentación observada, se puede decir que el autor tiene como objetivo ofrecer una forma sintética de efectuar la división.

Además, dedica un apartado a la divisibilidad de polinomios, en el que expresa que dos polinomios serán divisibles si el resto de dicha división es cero, siendo el valor que anula el polinomio cero del mismo. Asimismo se consigna que si a es cero de una función f(x) entonces F es divisible por x-a, lo cual según el autor resulta útil, para factorizar polinomios: “factorizar un polinomio es simplemente descomponerlo en sus factores primos, y no es otra cosa que la aplicación de la misma propiedad distributiva”

En los ejercicios desarrollados por el autor, se pudo observar que la técnica presentada para la factorización de un polinomio consistiría en:

- Hallar las raíces resolviendo la ecuación polinómica o bien por tanteo, cuando la ecuación no es tan sencilla de resolverla.
- Aplicar la regla de Ruffini.

Para el caso en que no sea tan sencillo encontrar las raíces de la ecuación, el autor propone recurrir al método de las aproximaciones, a través de iteraciones necesarias para lograr la mejor aproximación posible de la raíz buscada. La representación gráfica, la menciona para el caso donde las raíces no son reales.

Libro 2

División de polinomios. En primer lugar el autor presenta un ejemplo de una división exacta, luego la definición de cociente de polinomios en la cual expresa que es una forma similar a los números enteros, “dado dos polinomios P(x) y Q(x), siempre existen polinomios C(x) y R(x) únicos, llamados cociente y resto, respectivamente, tales que: P(x)= C(x).Q(x)+R(x) con gr R(x) < gr Q(x) o R(x)=0”

A través de un nuevo ejemplo en el que se conocen los polinomios dividendo, divisor, pretende determinar cociente y resto a través de la definición de división, retomando luego el mismo ejemplo para mostrar el algoritmo de la división.

Se ha observado que de acuerdo a la definición de división de polinomios presentada por el autor, se puede asegurar la existencia del C(x) y R(x), inclusive cuando el grado del dividendo es menor al grado del divisor, lo que se infiere de la expresión “siempre existen”.

El trabajo continúa con una serie de ejercicios propuestos, de los cuales en esta instancia hemos elegido 2 de ellos para realizar un análisis a través de la TAD que nos permita, al igual que con el libro anterior, identificar conceptos involucrados, posibles razonamientos y procedimientos, aspectos que no se tuvieron en cuenta en el desarrollo del tema y que podrían obstaculizar la resolución correcta de lo propuesto, entre otros.

Ejercicio 1: Encuentren, si es posible, un polinomio Q(x) tal que $5x^5 + 9x^4 - 22x + 18 - Q(x)(x - 4 + 2x^2) = 3x^5 + 3x + 6$.

Técnica1: Teniendo en cuenta la definición y la condición de los grados dada se pide encontrar Q(x) (el divisor) si es posible. Se supone que $5x^5 + 9x^4 - 22x + 18$ es el dividendo, $x - 4 + 2x^2$ es el cociente y $3x^5 + 3x + 6$ es el resto.

Observando la igualdad el polinomio Q(x) debe ser de grado 3, ya que al multiplicar por el polinomio de grado 2 se transforma en uno de grado 5. Dado que la condición del grado es gr R(x) < gr Q(x) y suponiendo que el resto es $3x^5 + 3x + 6$, la misma no se verifica. Por lo tanto no existe Q(x).

Técnica 2: Como: $5x^5 + 9x^4 - 22x + 18 - Q(x)(x - 4 + 2x^2) = 3x^5 + 3x + 6$

Es posible escribir: $5x^5 + 9x^4 - 22x + 18 - (3x^5 + 3x + 6) = Q(x)(x - 4 + 2x^2)$

El polinomio Q(x) debe ser de grado 3 para que se verifique la igualdad. Por lo tanto, Q(x) debe tener la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$

$5x^5 + 9x^4 - 22x + 18 - (3x^5 + 3x + 6) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)(x - 4 + 2x^2)$

Se efectúan las operaciones correspondientes aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, y la asociativa de la suma, quedando:

$2x^5 - 9x^4 - 25x + 12 = 2ax^5 + (a+2b)\, x4 + (-4a+b+2c)\, x^3 + (-4b+c+2d)x^2 + (-4c+d)x - 4d$

Aplicando la definición de igualdad de polinomios, se comparan los coeficientes respectivos de igual grado y se llega: a=1; b=4; c=0 y d=-3. Al igualar el término en x y reemplazar c y d por los valores hallados, se tiene:

$-25 \neq -4.\,0 - 3$. Los valores de c y d no satisfacen la igualdad, por lo tanto no existe el polinomio Q(x).

Técnica 3: Como: $5x^5 + 9x^4 - 22x + 18 - Q(x)(x - 4 + 2x^2) = 3x^5 + 3x + 6$

Es posible escribir: $5x^5 + 9x^4 - 22x + 18 - (3x^5 + 3x + 6) = Q(x)(x - 4 + 2x^2)$

$$2x^5 + 9x^4 - 25x + 12 = Q(x)(x - 4 + 2x^2)$$

La división entre $2x^5 + 9x^4 - 25x + 12$ y $x - 4 + 2x^2$ tiene que ser exacta, sin embargo no lo es, obteniéndose un resto distinto de cero. Se concluye que Q(x) no existe.

Tecnología:

- Definición de división entre polinomios

- Propiedades de los números reales
- Definición de igualdad entre polinomios

En esta actividad, la expresión "encuentren, si es posible" nos hace pensar que se pretende llevar a la reflexión sobre la existencia o no de polinomios que cumplan con la definición de división de los mismos, hecho contradictorio con la definición de división de polinomios dada por este autor, en la cual aseguraba siempre su existencia.

Ejercicio 2: Hallen el cociente y el resto de la siguiente división: $6\,x^3 : 2x^4$

Técnica: teniendo en cuenta la división de polinomios

$6\,x^3 = (2\,x^{4)}\ C(x)+R(x)$ y el gr $R(x) < \text{gr}\ (2\,x^4)$

El grado de R(x) puede ser: 0, 1, 2, o 3. Pero para que la igualdad se cumpla, C(x) debe ser cero y el grado de R(x) debe ser 3. Entonces queda: $6\,x^3=2\,x^4\ .0+6\,x^3$

Tecnología: Definición de división entre polinomios

Regla de Ruffini. En este apartado comienza especificando cuando un polinomio es divisible por otro: "P(x) es divisible por Q(x) si el resto, R(x) de la división de P(x) por Q(x) es 0".

A continuación enuncia el teorema del Resto: "El resto de dividir un polinomio P(x) por un polinomio de la forma (x-a) es P(a)."

Seguidamente menciona que: "Si a es un cero (o raíz) del polinomio, entonces P(a) = 0". A partir de esto el autor establece la condición de divisibilidad entre polinomios cuando el polinomio divisor es de la forma x-a: "P(x) es divisible por (x-a) si y solo si P(a) = 0, o sea, a es raíz de P(x)."

En los ejemplos propuestos por el autor, siempre proporciona una de las raíces para que se halle un polinomio que tenga un grado menor al original. Enuncia: "La regla de Ruffini es un método sencillo para dividir un polinomio cualquiera por un polinomio mónico de grado 1, o sea, por un polinomio de la forma (x-a)".

Se observa que la técnica presentada por el autor para la factorización de un polinomio consistiría en: dado un polinomio P(x) de grado n

- Buscar (por tanteo) una raíz x_1
- Aplicar la regla de Ruffini para disminuir el grado del polinomio original y expresarlo de la forma $P(x)=(x-x_1)$. Q(x), el grado de Q(x) es n-1, donde las raíces de Q(x) serán también raíces de P(x).
- Reiterar un procedimiento similar al de P(x) para Q(x), pero de un grado menos. Si en algún momento la expresión obtenida es de grado 2, puede usarse la resolvente.

Luego concluye: "Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales."

El autor se cuestiona ¿qué hacer para encontrar raíces de polinomios de grado mayor o igual a 3, ya que no existen fórmulas como la de los polinomios de grado 2?. Para ello desarrolla el "Lema de Gauss"

"Sea P(x) un polinomio de grado n con todos sus coeficientes enteros. Si el número racional p/q, escrito de manera irreducible, es raíz de P(x); entonces, p divide al término independiente y q divide al coeficiente principal"

Análisis comparativo libros 1 y 2

En relación a la definición del concepto de división de Polinomios se ha podido observar que uno de los libros (1) presenta una definición en la que queda oculta la expresión [P(x)= C(x).Q(x)+R(x)], utilizándose solo como "verificación" de una cuenta, hecho que dificultaría encontrar la solución de determinadas actividades. En cambio el otro (2) utiliza como técnica a la definición de la división y sus condiciones, que sería la más adecuada para la resolución de las actividades relacionadas.

El autor del libro 2 propone en las ejercitaciones un trabajo que involucra las relaciones entre dividendo, divisor, cociente, resto, además de la condiciones de los grados. En la mayoría de los libros analizados, el uso de este procedimiento es poco frecuente. Con esta técnica no se necesitaría previamente "completar y ordenar los polinomios".

Otro aspecto a señalar que se ha podido observar en textos del nivel medio y en particular el libro1, es que plantean como condición (implícita) que para efectuar la división, el grado del divisor debe ser menor o igual al grado del dividendo. En cambio otros autores, como el libro 2, aseguran en forma explícita que la división es siempre posible.

En relación a lo último se puede decir que de acuerdo al análisis de algunos textos universitarios, se ha observado que no existe una condición sobre los grados del dividendo y divisor. En el caso que el divisor sea de mayor grado (en general no son presentadas en la enseñanza media), se toma al cociente como el polinomio nulo y el resto igual al polinomio del dividendo. (Teorema de la existencia del algoritmo de la división de polinomio). Este planteo llevaría a cuestionar la condición de la trivialidad.

La presentación de la Regla de Ruffini para estos autores, es ofrecer una forma sintética de efectuar la división. Si bien aparece en forma esquemática la Regla de Ruffini, dejan al lector la interpretación y justificación de dicha regla, por ejemplo: ¿por qué se escriben solo números, y no las "x"?, ¿por qué el opuesto del término independiente del divisor?, ¿porqué se multiplica? ¿Por qué se suma? ¿Siempre en el mismo orden se realiza las operaciones? ¿Qué condiciones debe cumplir el polinomio dividendo?

En ambos libros se pudo observar que, queda a cargo del lector la realización de la analogía del algoritmo de la división entre dos polinomios y la regla de Ruffini, en la cual se concluya que para el algoritmo como para la Regla de Ruffini el dividendo siempre debe estar ordenado en forma decreciente y completo.

Los ejercicios propuestos en el libro 1 no presentarían problema en las búsqueda de las raíces, porque los polinomios a los sumo son de grado 3 y los coeficientes números pequeños. En el libro 2 el autor considera ejemplos de polinomios superiores a grado 3, también sencillos para la búsqueda de sus raíces. En este sentido Fonseca, Bosch y Gascón (2005) sostienen que "Todo está preparado para que las técnicas "funcionen" siempre que se las requiera y para que no exista ningún conflicto entre las técnicas de que se dispone y las tareas matemáticas que se proponen".

Se infiere en el libro 1 que la regla de Ruffini es utilizada siempre que la raíz sea entera, quedando la idea de que es el único caso donde se la puede aplicar. Al respecto Fonseca, Bosch y Gascón (2005, Pág. 4) expresan que:

> "El uso iterado y sistemático de esta regla para la resolución de ecuaciones Polinómicas con coeficientes enteros genera en los alumnos un principio tecnológico "folclórico" y muy robusto según el cual todas las ecuaciones Polinómicas de grado mayor que 2 con coeficientes enteros, o tienen alguna raíz entera y ésta se puede calcular "por Ruffini" o no tienen ninguna raíz".

Conclusión

La exploración y el análisis de los libros de textos, nos ha permitido evidenciar que los autores realizan diferentes interpretaciones en relación a un contenido en particular y a la forma de presentar los mismos, lo cual se ve reflejado en la importancia que dan a las técnicas, las cuestiones que quedan implícitas, las que se dejan a cargo del lector, los razonamientos que se priorizan a la hora de presentar actividades, entre otras.

Para el contenido específico de división de Polinomios se puede decir que se priorizan técnicas diferentes, con respecto a la división. En nuestro caso particular, en uno de los textos se ha observado que el algoritmo de la división y la expresión $P= CQ+R$ se utilizan como "verificación", en cambio en el otro la técnica utilizada es la definición $P(x)= C(x).Q(x)+R(x)$ y sus condiciones.

Se pudo observar coincidencia en relación a la regla de Ruffini, ambos autores la presentan como herramienta que permite efectuar la división de una forma más sintética. Aparece en forma esquemática, dejando al lector la interpretación y justificación de la misma

En las actividades propuestas y su relación con los aspectos teóricos desarrollados, también se han encontrado diferencias significativas. Estas se vislumbran en el hecho de que a nuestro criterio uno de los textos analizados propone actividades que no podrían ser resueltas con lo desarrollado.

Como reflexión final se puede decir que los libros de texto delegan mucha responsabilidad al lector al dejar muchas cuestiones a ser resueltas por éste.

Bibliografía

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). *¿Por qué la modelización está ausente de la enseñanza del álgebra escolar?.* Quaderni di Recerca in Didattica, 14, 125-133.

Bosch M. Gascón J. (2009). *Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria*. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Camus, N. y Massara, L. (1998). *Matemática 3*. Aique. Buenos Aires.

Chevallard Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Ice Horsori Barcelona

Fonseca C., Bosch M., Gascón, J. (2005). *El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la "Regla de Ruffini"*. Ponencia presentada en el I congreso internacional sobre La Teoría Antropológica de lo Didáctico. Universidad Internacional "Antonio Machado". Baeza (España)

Gascón J. (1998) *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33.

Quintero, R.; Ruiz D. y Terán, R. (2005). *Sobre las interpretaciones del símbolo "x" en los Polinomios*. Revista Educere Investigación arbitrada. Año 10, Número 33. Abril-mayo-junio 2006- Pág. 315-326.

Ursini Legovich, S. y Trigueros Gaisman M. (2003). *Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable.* Investigación y Experiencias Didácticas. Departamento de Matemática Itam. México.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Consejo Federal de Cultura y Educación (1997). Contenidos Básicos Comunes para la Educación Polimodal. Argentina.