

## **LIBROS DE TEXTO DE NIVEL MEDIO Y ENFOQUE DE ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA**

*María Teresa Juan*  
*Centro Regional Universitario Bariloche, Universidad Nacional del Comahue.*  
*(Argentina)*  
*[maytej@crub.uncoma.edu.ar](mailto:maytej@crub.uncoma.edu.ar)*

### **RESUMEN**

Este trabajo se encuadra en el proyecto de investigación “Aprendizaje de la demostración en geometría” cuyo objetivo general es estudiar el proceso de aprendizaje de la demostración por parte de estudiantes del profesorado en matemática en el contexto de la Geometría Euclídea. Con el objetivo particular de analizar la posible vinculación entre concepciones encontradas en nuestros estudiantes del Profesorado en Matemática y el enfoque con que se tratan los contenidos de geometría en nivel medio, reportamos en este trabajo el análisis del relevamiento realizado sobre la orientación con que tratan algunos libros de texto de primer año de nivel medio ( 8° de EGB) los contenidos de geometría. Estudiamos estas tendencias de los libros analizando en ellos: Cuánto del total de contenidos abordados corresponden a contenidos de geometría; si se realizan construcciones utilizando instrumentos de geometría (compás, regla, etc.) y qué peso tienen éstas, precisión en las definiciones, promoción de deducciones, analizando si se muestran ejemplos de demostraciones, pruebas, argumentaciones y/o justificaciones.

### **INTRODUCCIÓN**

El trabajo que aquí se presenta se encuadra dentro del proyecto de investigación Aprendizaje de la Demostración en Geometría del grupo de Educación Matemática del CRUB.

En un trabajo reciente, Montoro y Juan (2005) estudiamos las concepciones de estudiantes del profesorado en matemática (que aún no cursaron Geometría Euclídea) en cuanto a la demostración en geometría y hemos encontrado que estos estudiantes refieren a una Geometría escolar, no formal, centrada en los objetos e instrumentos geométricos (triángulo, compás, regla, etc.), más que en el método matemático y con una pobre relación con las demostraciones. Esto nos llevó a preguntarnos acerca de las experiencias previas de los estudiantes con respecto a la geometría.

Es difícil evaluar esto, seguramente, podemos encontrar una gama enorme, que varía según colegios, docentes, grupos de estudiantes, etc. Una posibilidad, que de alguna manera podría homogeneizar esta evaluación es considerar los libros de textos. Estos se constituyen en un referente, no solo por el uso que puedan darle los estudiantes, sino también porque los docentes suelen utilizar los libros de texto para planificar las clases y también reflejan, de alguna manera, las tendencias actuales en las modalidades de tratamiento de los temas.

Si bien existen documentos que muestran un desarrollo de la geometría muy anterior a la helénica, (Boido y otros), fueron los griegos quienes introdujeron un elemento novedoso en la matemática: el método deductivo.

La incorporación del método deductivo a la matemática estuvo acompañada de la intención filosófica de construir una ciencia teórica cuya meta era el conocimiento de la verdad. El objetivo del método deductivo era explicar: explicar era demostrar. (Moreno Armella, L., 1996).

En la experiencia como docentes en materias de matemática de primer año de la universidad, notamos que un problema adicional a las dificultades inherentes a cada contenido matemático desarrollado, se suma el conflicto que provoca el uso de lenguaje y simbología específico, desconocido totalmente para los estudiantes.

En este trabajo hacemos un relevamiento acerca de la orientación que dan algunos libros de texto de nivel medio a la geometría euclídea, en cuanto a la posible relación entre estos enfoques y las concepciones acerca de la geometría encontrada en nuestros estudiantes.

## **OBJETIVOS**

Indagar el enfoque con que tratan los libros de texto de 8° año de EGB analizados, en cuanto a enseñanza del método matemático en los contenidos de geometría euclídea y su posible vinculación con las concepciones en este sentido que encontramos en nuestros estudiantes, a través de analizar en los libros de texto:

- \* Qué porcentaje del total de contenidos abordados en los libros corresponden a contenidos de geometría
- \* Si se realizan construcciones utilizando instrumentos de geometría (compás, regla, etc.) y qué peso tienen éstas.
- \* Precisión en las definiciones
- \* Promoción de deducciones (analizando si se muestran ejemplos de demostraciones, pruebas, argumentaciones y/o justificaciones)

## METODOLOGÍA

### MATERIALES

Se analizaron cinco libros de texto de 8° año de EGB (1° año del nivel secundario, para el sistema de la provincia de Río Negro).

Evalúamos cuánto del total de los contenidos de cada libro de texto corresponden a contenidos de geometría euclídea, luego analizamos cómo se presentan estos contenidos, focalizando la atención sobre algunos indicadores del grado de formalización, como son: definiciones, generalizaciones, enunciado y demostración de propiedades y los tipos de demostraciones que en ellos se desarrollan.

### ANÁLISIS DE LOS TEXTOS

*1 Título del libro: Matemática 8 E.G.B. / 1° año*

**Autores: Julia Seveso de Larotonda, Ana Renata Wykowski, Graciela Ferrarini**  
**Editorial. Kapelusz**

El libro se presenta en 11 unidades, divididas en capítulos, en total suman 27 capítulos, de los cuales 8 corresponden a contenidos de geometría euclídea.

Aparecen en algunos casos, recuadrados ideas de definición de los conceptos, por ejemplo:

- *Un movimiento que conserva el tamaño y las formas de las figuras se llama movimiento rígido o isometría”.*
- *Las traslaciones, las rotaciones y las simetrías son isometrías.*
- *En una isometría la imagen es siempre congruente con la figura original.*

Se muestran, a través de dibujos, algunos ejemplos de figuras en el plano y sus respectivas imágenes por un movimiento, que podrían dar la idea de a qué se refiere con movimiento (aunque no quedaría claro qué cosas no son movimientos), aunque podemos pensar que los chicos de esta edad tiene una noción intuitiva de *movimiento*. Con respecto al significado de “conservar las formas”, no se dice nada, podríamos suponer, por ejemplo, que todos los triángulos tienen “la misma forma” (forma de triángulo).

*“Las traslaciones, las rotaciones y las simetrías son isometrías.”*, ¿son las únicas isometrías? O ¿son ejemplos de isometrías?

No queda muy en claro si el último ítem del recuadro procura ser una definición de “congruente” o una propiedad de las isometrías. En los siguientes capítulos, en lugar de utilizar la palabra “congruente” para referirse a conjuntos de puntos isométricos, utiliza la palabra “igual”, con lo cual, queda aún menos claro para qué se introdujo el término “congruente”.

En general, aparecen pocas demostraciones, algunas de las propiedades que se demuestran son las correspondientes a ángulos alternos internos, y conjugados entre paralelas, y suma de ángulos interiores de un triángulo y de un cuadrilátero, etc. Se plantean actividades como medir ángulos dados, dibujar ángulos, dada su amplitud, dibujar triángulos dadas las medidas de los lados, construcción de polígonos regulares. También se plantea el uso de escuadra, regla, compás y transportador para graficar los transformados de algunos conjuntos de puntos, mediante simetrías, traslaciones y rotaciones.

Algunas propiedades están justificadas mediante construcciones (por ejemplo, se propone comprobar mediante dibujos que los ángulos inscritos en semicircunferencias son rectos); los criterios de congruencia de triángulos se fundan a partir de las construcciones de triángulos, dados los elementos convenientes y se justifican a partir del dibujo resultante de tales construcciones.

## **2. Título del libro: *Matemática 1***

**Autores: Mariana Amenedo, Susana Carranza, M. Teresa Diñeiro, Jorge Grau, M. Laura Latorre**

**Editorial: Santillana**

Este libro de texto contiene 16 unidades temáticas, de las cuáles 4 abordan contenidos de geometría.

Cada uno de estos capítulos está organizado comenzando por definiciones precisas de los conceptos a tratar, en algunos casos, estas definiciones incluyen propiedades, por ejemplo:

*“Se llama bisectriz (b) de un ángulo de un triángulo a la semirrecta que lo divide en dos ángulos congruentes. Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto que equidista de los tres lados del triángulo llamado incentro”*

Se sigue con una clasificación, (por ejemplo, de los triángulos según sus lados, de los poliedros, de las posiciones relativas entre rectas, etc.).Luego se induce al descubrimiento de propiedades a

través de actividades y a la verificación empírica de propiedades, propone a menudo plegado de papel como una forma de verificación (utiliza así, de manera empírica, las propiedades de las simetrías axiales). Muchas de estas propiedades se demuestran formalmente y aparecen distintos tipos de demostraciones (directa, indirecta, absurdo), otras no tan formales, se presentan como justificaciones de por qué no puede ser que la propiedad no se cumpla. Se utiliza simbología matemática específica.

El primer capítulo del libro se denomina “*Lenguaje. Razonamiento matemático*”, incluye simbología, nociones elementales de lógica, método matemático, un poco de historia, tipos de demostraciones, etc., que son utilizados a lo largo de todo el libro.

Si bien el libro dedica solo 4 de las 16 unidades a geometría, en los otros capítulos relaciona temas, por ejemplo, de aritmética con temas de geometría.(por ejemplo: relación entre propiedad distributiva y área de rectángulos).

En cuanto al manejo de instrumentos geométricos, se muestra el trazado de una paralela a una recta dada y que pasa por un punto exterior a ella, el trazado de una perpendicular a una recta dada, la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo, todas estas construcciones realizadas con regla y compás.

Al igual que el texto anterior, los criterios de congruencia de triángulos se sustentan sobre construcciones convenientes (para las cuales se utiliza regla graduada, compás y transportador).

### **3 Título del libro: *Matemática 8***

**Autores: Susana Semino, Susana Englebert, Stella Pedemonti**

**Editorial: A-Z Editora.**

Este texto consta de doce unidades, de las cuales cuatro tratan temas de geometría (no exclusivamente).

Comienza cada unidad con una propuesta de trabajo grupal para los estudiantes, luego continúa con una formalización de los conceptos trabajados en forma grupal, en la que se definen y clasifican dichos conceptos.

El libro propone un aprendizaje mediante la actividad y manipulación de objetos concretos. Se utiliza escasa simbología matemática.

En cuanto a las demostraciones, solo encontramos una demostración entre los contenidos correspondientes a geometría: “*Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales*”. Sí aparecen varios ejercicios en los que se propone realizar demostraciones.

Inmediatamente previo a esta demostración, encontramos el siguiente texto: “*Hasta ahora trabajaste en geometría con propiedades que obtuviste a través de la observación, construcción y medición de figuras. Para que una propiedad sea válida, no es suficiente comprobar que se cumple en algunos ejemplos. Es necesario demostrarla siguiendo un razonamiento lógico a partir de los datos, las definiciones y ciertas propiedades, llamadas **axiomas**, que se aceptan, por ser muy evidentes, sin demostrar. A las propiedades que demostramos las llamamos **teoremas**.*” En esta demostración (repito: la única y por lo tanto, sirve como único modelo de demostración a los estudiantes), se utiliza la propiedad de que los ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes, propiedad previamente verificada por los alumnos mediante un ejemplo. ¿Cómo entenderán los estudiantes esto? Esta propiedad que utilizaron, ¿es un axioma? ¿es un teorema? ¿qué tipo de propiedades pueden o no utilizar en una demostración?

En cuanto al uso de instrumentos geométricos, se muestran los pasos a seguir para la construcción de un pentágono regular (utilizando regla, compás y transportador) y se propone la construcción de un octógono y de un hexágono regular, siguiendo el procedimiento análogo. También se indica cómo construir con regla y compás, segmentos y ángulos congruentes a otros dados, basándose en estas dos construcciones se proponen construcciones de triángulos y a partir de estas construcciones, se enuncian los criterios de congruencia de triángulos. Es decir, las construcciones realizadas justificarían los criterios de congruencia enunciados.

#### **4 Título del libro: *Matemática 1***

**Autores: Patricia Sadovsky, María Pura Melguizo, Clara L. Rubinstein de Walkman**

**Editorial: Santillana**

Conforman esta obra 18 unidades y 4 de éstas están dedicadas a contenidos de geometría. Los temas trabajados en cada unidad son introducidos mediante situaciones concretas de la vida cotidiana.

En cuanto a las definiciones, en general, parte de un ejemplo concreto, en algunos casos, falta luego la instancia de generalización del concepto, voy a citar a modo de ejemplo, la forma de definir los ángulos opuestos por el vértice:

*“Observa el dibujo de la hélice, ese viejo propulsor aéreo. ¿Sabés como se la utilizaba para hacer arrancar los primeros aviones? Se rotaba la hélice cierta*

*amplitud y luego se la empujaba con fuerza para que comenzara a girar. Las paletas de la hélice en las dos posiciones sugieren un par de ángulos que hemos sombreado en la figura. A estos ángulos los llamamos **opuestos por el vértice**.”*

Esta misma metodología de introducir los conceptos mediante ejemplos, es utilizada para el descubrimiento de las propiedades, algunas de las cuales son justificadas a continuación.

Con respecto al uso de instrumentos geométricos se plantean ejercicios para medir ángulos con transportador. Se construyen triángulos, conocidos tres datos convenientes (dos triángulos en cada caso) y a continuación de cada construcción, se pide verificar que los triángulos así obtenidos son congruentes, luego se enuncia el criterio de congruencia correspondiente.

#### **5 Título del libro: Matemática 8**

**Autores: María Laura Latorre, Laura Spivak, Pablo J Kaczor, María Celina L. de Elizondo.**

**Editorial: Santillana**

Tres de los once capítulos de este libro tratan contenidos de geometría.

Cada capítulo comienza con una fotografía y un texto que explica la relación entre esa fotografía y el tema desarrollado en el capítulo.

El libro parece estar enfocado al “como se hace”, por ejemplo, cómo se construye un triángulo semejante a uno dado ó cómo se obtiene la imagen de un segmento por una rotación.

En general, se enuncian las propiedades y luego aparecen aplicaciones de ellas, sin demostración ni argumentación que las justifique.

La simbología matemática utilizada es escasa. Las definiciones son precisas, aunque en algunos casos se mezcla la definición con propiedades de lo definido, por ejemplo:

*“Las **medianas del triángulo** son los segmentos que tienen un extremo en el punto medio de un lado, y el otro extremo en el vértice opuesto a ese lado, y se cortan en un punto llamado **baricentro**.”*

El hecho de que las medianas de un triángulo se corten en un punto parece ser, en este texto, parte de la definición.

En cuanto al uso de instrumentos geométricos se plantea el trazado de paralelas y perpendiculares utilizando escuadra. Además se indican los pasos a seguir para la construcción de la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo. Las transformaciones rígidas se definen mediante la construcción del transformado de un punto, o de un conjunto de puntos.

En cuanto a los criterios de congruencia de triángulos, en este caso, no se justifican mediante la construcción, solo se enuncian los criterios y a continuación se muestra como, en virtud de cada criterio, construir un triángulo congruente a uno dado, con los datos dados.

## CONCLUSIONES

Este trabajo no intenta hacer una valoración de la calidad de los textos estudiados, cada uno de estos libros tiene su fortaleza en concordancia con la posición y objetivos de los autores. Solo pretende ser una mirada sesgada de estos textos, a través de la lupa que nos propusimos (como se trata la geometría euclídea en cuanto a nivel de formalización, respecto al uso de simbología y lenguaje matemático, precisión en las definiciones si muestran ejemplos de demostraciones, pruebas, argumentaciones y/o justificaciones).

Si tenemos en cuenta el potencial epistémico de la geometría, podemos decir que los contenidos de geometría ocupan solo una porción pequeña de los contenidos abordados en los libros de texto, en el mejor de los casos, alcanza un tercio del total.

Comparando los libros analizados entre sí:

- \* No encontramos uniformidad en los contenidos de los distintos textos, considerando que todos corresponden a un mismo año escolar.
- \* Hay una gran disparidad respecto del grado de formalización con que se tratan estos contenidos, tanto en la precisión de las definiciones como en las demostraciones.

Si bien las definiciones no siempre pueden darse de manera rigurosa, teniendo en cuenta la edad de los estudiantes a los que están dirigidas, creemos que debería tenerse especial cuidado, ya que notamos, en algunos casos que tal vez con la intención de simplificar o de explicar tales definiciones se entremezclan en la definición propiedades de los conceptos a demostrar.

Las construcciones aparecen en muchos casos ocupando el papel de demostraciones y se constituyen así en el marco que sustenta las propiedades.

Encontramos que en todos los textos analizados, para el tratamiento del tema *congruencia de triángulos*, se realiza la construcción de un triángulo congruente a uno dado, o de dos triángulos congruentes dados los datos, y a continuación se pide verificar la congruencia de los triángulos así obtenidos. Si bien no se explicita que tal construcción constituye la demostración del criterio, parece ser la imposibilidad de construir un triángulo no congruente lo que justifica el criterio y seguramente es también lo que más convence a los estudiantes de que el criterio es válido.

Esta potencialidad de las construcciones puede ser la generadora de la asociación que encontramos ( Montoro y Juan, 2005) en nuestros estudiantes del profesorado en matemática, entre la geometría y los instrumentos geométricos, más que con el método matemático. En general, resulta poco explotado el recurso que brinda la geometría para introducir a los alumnos en la actividad de demostración o justificación.

La geometría euclídea está prácticamente excluida de los planes de estudio del polimodal (o de los años más avanzados del nivel secundario), parece razonable entonces que los estudiantes culminen sus estudios secundarios con la concepción de la geometría centrada en los objetos geométricos y físicos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amenedo, M.; Carranza, S. Diñeiro, M. T.; Grau, J.; Latorre, M.L (1995). *Matemática 1*. Buenos Aires: Santillana.
- Boido, G, y otros. *Pensamiento científico. Módulo 3: La geometría*. Prociencia (Conicet)
- Latorre, M. L., Spivak, L. Kaczor, P., de Elizondo, M. C. L. (1997). *Matemática 8*. Buenos Aires: Santillana
- Montoro, V. y Juan, M. T. (2005). *Demostrar...demostrar... ¿Qué es eso? Modo de indagación sobre las concepciones de estudiantes de profesorado acerca de la demostración en geometría*. Trabajo Completo, publicado en las memorias del V Simposio de Educación Matemática Chivilcoy (Prov. de Bs. As) Mayo de 2005.
- Moreno Armella, L. (1996). *La demostración en perspectiva*. Revista Mexicana de Investigación Educativa, Vol. 1.
- Paruelo, Jorge (2002). *Enseñanza de las ciencias y filosofía*. Rev. Enseñanza de las ciencias.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning* 2 vols. Princeton University Press: Princeton, NJ.[Trad. Castellana: Matemáticas y razonamiento plausible. Tecnos: Madrid, 1966]
- Semino, S. Englebert, S. y Pedemonti, S.(1997). *Matemática 8*. Buenos Aires A-Z.
- Seveso de Larotonda, J.; Wykowski, A.R., Ferrarini, G. (1997). *Matemática 8 E.G.B. / 1º año*. Buenos Aires: Kapelusz.
- Sadovsky, P., Melguizo, M. P. y Rubinstein de Waldman, C. (1993). *Matemática 1*. Buenos Aires: Santillana.