Campo de problemas geométrico-algebraicos en la formación del profesor. Un posible estudio en entornos dinámicos

Rosa Ferragina y Leonardo Lupinacci
Universidad Nacional de General San Martín (Argentina
rosaferragina_1@hotmail.com, leolupinacci@yahoo.com.ar

Estudios preliminares realizados en el proyecto "Geometría y TIC: estudio didáctico de propuestas de enseñanza en la escuela secundaria"[1] permiten entrever que, tanto en la educación secundaria, como en la formación inicial de profesores, no se produce una conjunción de saberes entre la geometría métrica y la analítica, conformando así dos bloques separados de conocimiento, el segundo de los cuales, además, se sustenta solo en el desarrollo de técnicas algebraicas. El aporte de un entorno de geometría dinámica permitiría, a partir de las herramientas de construcción de figuras y sus transformaciones en tiempo real, la introducción de variaciones a las cuestiones geométricas iniciales, dando lugar a nuevos recorridos de estudio y a la conformación de un campo de problemas.

Marco de referencia

En los últimos años, una cantidad considerable de investigadores en Didáctica de la Matemática han considerado tema de interés la enseñanza de la geometría en la formación del profesor puesto que el estudio de la geometría favorece el desarrollo de la conjeturación, la argumentación deductiva y la modelización (e.g., Acosta, 2005, 2007; Santaló,1993; Santos Trigo, 2003; Villella,1999, 2001).

Para destacar la importancia de la geometría en la formación del profesor de matemática, exponemos nuestras coincidencias con la opinión de algunos didactas sobre el tema:

> La Geometría, puede mostrarse en su forma intuitiva, la primera históricamente, para llegar a la geometría en coordenadas y la introducción de las estructuras

[1] El proyecto se desarrolla dentro del área Didáctica de la Matemática del CEDE (Centro de Estudios en Didácticas Especificas) perteneciente a la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM) en Argentina.

Ferragina, R. y Lupinacci, L. (2013). Campo de problemas geométrico-algebraicos en la formación del profesor. Un posible estudio en entornos dinámicos. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 187-194). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

> algebraicas, pero estas comparaciones y variedad de posibilidades deben ser mostradas por el profesor de la materia, no esperar a que se las indique el profesor de didáctica o de historia y filosofía de las ciencias. (Santaló, 1993, p. 13)

Además, los objetos matemáticos que estudia la geometría pueden dibujarse o construirse y, a partir de la manipulación o modelización de los mismos, se logran desarrollos conceptuales que permitirán elaborar razonamientos de tipo deductivos (Villella, 2001).

Esta multiplicidad de sentidos que proponen los autores mencionados, podría permitir que en su formación, el futuro docente considere con mayor fundamento que la geometría debe estar presente en sus clases de matemática. En Argentina, pese a que los nuevos cambios curriculares para la enseñanza secundaria enfatizan el estudio de esta rama de la matemática, sin embargo, sigue siendo un área de escaso trabajo en las clases. Esto podría deberse a que los currículos vigentes para la formación básica del profesor, solo cuentan con dos espacios para el tratamiento geométrico. En el primer año de formación, el contenido se focaliza sobre la geometría euclidiana (una combinación entre métrica y sintética) y, en el segundo, se desarrolla la geometría analítica o de coordenadas que sustenta sus tratamientos en la elaboración de técnicas algebraicas. Entonces, esos dos espacios de formación quedan como dos bloques separados, produciéndose entonces una discontinuidad entre ambas, que no permite mostrar su complementariedad y evolución, división que se podría sustentar en un modelo epistemológico de referencia superficial (Gascón, 2002), que implica para el futuro profesor tanto una pérdida de conjunción de saberes, como de conocimiento y habilidades matemáticas.

La propuesta que aquí se presenta se orienta hacia la construcción de conocimiento pertinente (geométrico-algebraico) que recupere y concilie los marcos teóricos y las experiencias en el aula a través de desarrollos didácticos, tomando en cuenta que la formación de un profesor se sustenta en multiplicidad de dimensiones: una sólida base de conocimiento científico, conocimientos de pedagogía, didáctica del área que se ocupa de la especificidad del conocimiento matemático y sus prácticas de enseñanza, análisis del contexto social en que está inmersa la escolarización que es escenario de las futuras prácticas profesionales.

También es oportuno destacar que, en la formación del profesor, esta multiplicidad e integración de la geometría (en especial métrica y analítica) se podría potenciar con el empleo de algún software de geometría dinámica, puesto que adquirir conocimientos profesionales en el ámbito de estas tecnologías requiere tanto profundizar en el conocimiento propio de la matemática como en el análisis de los resultados de su implementación en la enseñanza. Cobra importancia entonces, aportar experiencias y espacios de reflexión en torno a la tecnología informática tanto para los docentes a cargo de la formación como para los estudiantes, futuros profesores:

> Se acepta que en el proceso de aprender la disciplina, los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar donde constantemente busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planteen conjeturas, utilicen distintos sistemas de representación, establezcan conexiones, empleen varios argumentos y comuniquen sus resultados. Además, el desarrollo de herramientas tecnológicas está influyendo notablemente la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas. (Santos Trigo, 2003, p. 196)

Por ello, cuando se plantea la utilización de un software matemático, en la formación docente, se deberían construir nuevas praxeologías que incluyan los objetos computarizados como objetos con legitimidad matemática y, que además estén incluidos en las tareas, técnicas y tecnologías[2], para que de este modo el profesor (o futuro profesor) no minimice los efectos de su aplicación y restrinja su uso (Acosta, 2007).

En este artículo se describirá una nueva praxeología, en la formación de profesores, que para la resolución de un problema requiera del empleo de técnicas analíticas, pero que con la utilización previa de técnicas métricas se posibilite el diseño de estrategias, que luego se retomen con técnicas analíticas y, de este modo, se le dé al problema un mayor grado de generalidad, así como también se deje en evidencia la continuidad y/o complementariedad entre la geometría métrica y la analítica.

---

[2] En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), dentro de cada actividad matemática es posible identificar dos partes: la práctica matemática en sí, formada por las *tareas* y *técnicas* y, el razonamiento sobre dicha práctica, conformado por las t*ecnologías* y las *teorías*. La unión de estos dos aspectos de la actividad matemática, conforma una *praxeología matemática.*

ANÁLISIS DE UN PROBLEMA

La praxeología anunciada se realizará a partir del siguiente problema analítico particular: Buscar los rombos que tienen dos vértices consecutivos en los puntos $A = (0, 0)$ y $B = (3, 2)$, sabiendo que otro de los vértices está situado sobre el eje de abscisas.[3]

Resolución algebraica

Este problema puede resolverse analíticamente, sin realizar gráfico alguno, ni siquiera de los puntos dados a mano alzada. Entonces, lo primero sería considerar las condiciones de igualdad de lados del cuadrilátero:

$$\mathrm{d}(AB) = \sqrt{9+4}, \quad \mathrm{d}(AD) = \sqrt{x^2}, \quad \mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}(AD), \quad \sqrt{9+4} = \sqrt{x^2}, \quad 13 = x^2$$

Por lo tanto, las posiciones del vértice D y del C correspondiente son:

$$D_1 = (\sqrt{13}, 0) \qquad C_1 = (3+\sqrt{13}, 2) \qquad D_2 = (-\sqrt{13}, 0) \qquad C_2 = (3-\sqrt{13}, 2)$$

Es decir que mediante este desarrollo analítico – algebraico, se han encontrado dos rombos que cumplen con las condiciones pedidas. Pero, un análisis del mismo problema empleando técnicas métricas con software dinámico, permitiría cuestionarse dónde ubicar el otro vértice sobre el eje de abscisas, ¿es éste consecutivo de *A* o de *B*?

Resolución métrica

Se puede llegar a la solución mediante el empleo de la técnica de los dos lugares geométricos. Si el vértice sobre el eje de abscisas es consecutivo de *A*, es posible comenzar construyendo una circunferencia (compás) de centro *A*, para trasladar la medida *AB* que, en una las intersecciones con el eje de abscisas, determina *D*. Luego, mediante la construcción de rectas paralelas, se determina el vértice faltante. Utilizando técnicas similares se logra llegar a la solución existente cuando el vértice sobre el eje de abscisas es el consecutivo de B.

---

[3] Problema propuesto por el Dr. Josep Gascón en el marco de la Escuela de Invierno de la Universidad Nacional de San Martín (Gascón, 2007).

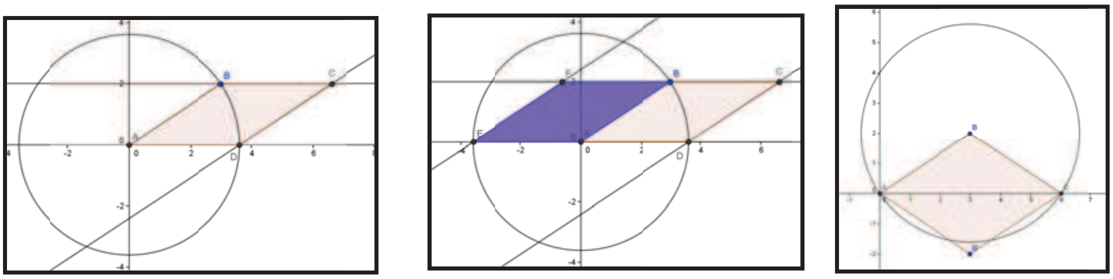

Figura 1: Construcciones por medio de la técnica de los dos lugares geométricos

Es decir, que si se realiza una resolución mediante técnicas métricas, con una construcción en un software de geometría dinámica[4], intervienen técnicas, como la conjunción de dos lugares geométricos, que podrían resultar equivalentes a las condiciones analíticas. Podría analizarse si la cantidad de soluciones que se determinan son las mismas, siguiendo una modelización algebraica o bien realizando la construcción dinámica. En el problema presentado, es posible evidenciar que sería conveniente volver sobre la resolución analítica para analizar de qué forma se obtendría la tercera solución encontrada. Esto estaría poniendo de manifiesto la complementariedad entre ambos tipos de técnicas, puesto que un problema que requiere la utilización de técnicas analíticas para ser resuelto con generalidad, podría necesitar de técnicas métricas para diseñar estrategias de resolución del ámbito analítico (Gascón, 2002).

DE LA EXPLORACIÓN DE UN PROBLEMA HACIA EL ESTUDIO EN UN CAMPO DE PROBLEMAS

Los programas de geometría dinámica, como GeoGebra, permiten tener como primer contacto con el problema un trabajo exploratorio mayor al que se puede realizar en lápiz y papel, puesto que:

> La geometría dinámica constituye un nuevo sistema de representación de los objetos geométricos que utiliza nuevos objetos ostensivos, los dibujos computarizados, que se diferencian de los dibujos sobre papel precisamente por su dinamismo: pueden ser arrastrados y deformados en la pantalla, conservando las propiedades geométricas que se les ha asignado por el procedimiento de construcción. (Acosta, 2005, p. 123).

[4] Para este trabajo se ha utilizado el software GeoGebra 4.2.

Estas nuevas cuestiones pueden surgir con la incorporación de la geometría dinámica, puesto que se hace necesario no sólo modificar las prácticas de enseñanza matemática (en todos los niveles), sino también determinar qué matemática se debería enseñar con esta herramienta (Acosta, 2005, 2007). Para que esta reformulación sea efectiva en la formación docente, resulta necesaria la creación de nuevas praxeologías, que posibiliten retomar problemas matemáticos que en algún momento de su estudio, quedaron sin resolver por limitaciones de las técnicas matemáticas disponibles, sean analíticas o métricas (Gascón, 2002).

Por ejemplo, una variante del problema anterior es: Buscar los rombos que tienen dos vértices consecutivos en los puntos $A = (m, 0)$ y $B = (3, 2)$, sabiendo que el otro vértice consecutivo de A, llamado $D = (x, 0)$, está situado sobre el eje de abscisas. Esta modificación permite implementar otras técnicas para explorar nuevos lugares geométricos que se darían con la relación existente entre las abscisas de A y D, para luego formular una tecnología basada en la dependencia funcional de las mismas desde la perspectiva analítica.

Resolución dinámica

Se realizan construcciones análogas a las del enunciado original, pero ahora se ha incorporado un deslizador ***m***, que para el problema representa el parámetro ***m*** correspondiente a la abscisa del punto A.

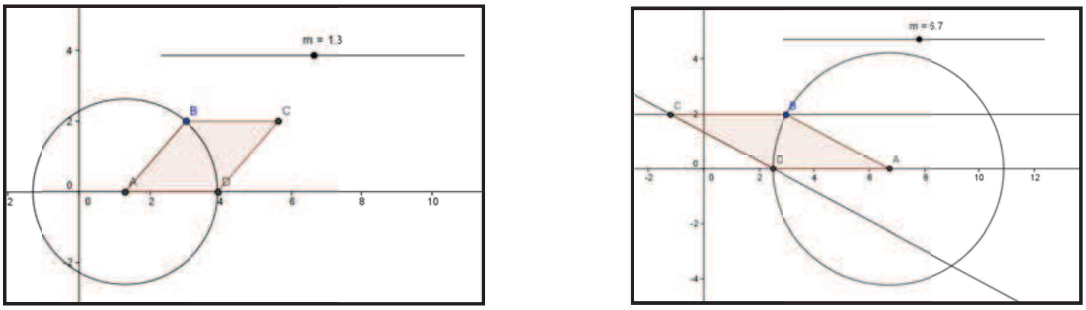

Figura 2: Incorporación de un parámetro en la construcción

El dinamismo del software posibilita visualizar las múltiples soluciones para los distintos valores de ***m*** y, también, conjeturar una posible relación existente entre la posición del vértice A con la del vértice D. Esta potencial relación sólo dependería de las abscisas de los puntos A y D. GeoGebra permite utilizar una técnica para determinar la existencia de una relación entre dos objetos construidos, que consiste en la construcción de un punto dinámico. Se ingresa entonces, en la barra de entrada el punto P con las componentes: $(x(D), x(A))$.

Cabría preguntarse ahora qué tipo de curva es la que se muestra y cómo se podría obtener esta relación en términos de las abscisas de A y D.

Resolución algebraica

Con las condiciones del enunciado, se expresan las medidas de los lados y se igualan ambas distancias:

$$\sqrt{(m-3)^2+4} = \sqrt{(m-x)^2} \Rightarrow -6m + 2mx = x^2 - 13 \Rightarrow m = \frac{x^2 - 13}{2(x-3)}$$

Se ha logrado una expresión que indica la relación existente entre las abscisas de los puntos D (x) y A (***m***). Ingresando esta expresión en la barra de entrada, podemos visualizar que su gráfica se corresponde con la trayectoria descripta por el punto P. Cada una de las soluciones geométricas, determina una de las ramas de la gráfica de la función.

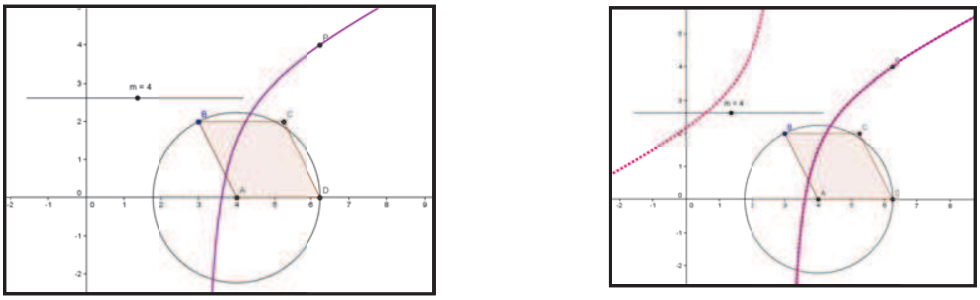

Figura 3: Rastro que deja el punto dinámico y superposición del rastro con la relación funcional encontrada

Otras posibilidades para estudiar en este campo de problemas son: ¿Qué ocurriría si se intercambian las componentes del punto dinámico P? ¿Por qué si se considera el punto D como consecutivo de B, se obtiene una recta en la trayectoria del punto P?

CONCLUSIONES

De un modo general, nos propusimos reflexionar sobre la revalorización de la geometría tanto en su enseñanza como en su aprendizaje, para el ámbito de la formación de profesores, que posibilita: la elaboración de conjeturas como un proceso previo a una formalización algebraica, la efectividad de una herramienta tecnológica para la construcción de conocimiento geométrico cuando se la implementa en praxeologías que permitan un uso significativo.

De un modo específico, hemos propuesto, para la formación inicial de profesores, el trabajo sobre problemas geométricos que pueden evolucionar en un campo de problemas geométrico-algebraicos, tanto por su potencialidad en la exploración como por la elaboración de conjeturas y modelos, en una integración con entornos de geometría dinámica y con las prácticas de enseñanza en las aulas.

REFERENCIAS

Acosta, M.E. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Revista Educación Matemática*, *17*(3), 121-140.

Acosta, M.E. (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En L. Ruiz, A. Estepa y F. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 85-100). Jaén, España: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Gascón, J. (2002). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico matemático. En *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales N°28*. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Documento recuperado de: http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/DISERTACIONESMATEMATICAS_28.pdf

Gascón, J. (en prensa). El proceso de algebrización de las matemáticas escolares. En *Escuela de invierno de Didáctica de la Matemática.* Buenos Aires, Argentina.

Santaló, L. (1993). *La geometría en la formación de profesores.* Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Santos Trigo, L. (2003). Procesos de transformación de artefactos tecnológicos en herramientas de resolución de problemas matemáticos. *Boletín de Asociación Matemática Venezolana, 10*(2).

Villella, J. (1999). Cuando la geometría es el tema de la reflexión matemática. En *Documentos para la capacitación docente*. *UNSAM.* Buenos Aires, Argentina: Baudino Ediciones.

Villella, J. (2001), *Uno, dos, tres… geometría otra vez*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor.