CB 23

SIGNIFICADOS PERSONALES VINCULADOS AL RAZONAMIENTO CONJETURAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESOR

María Elena MARKIEWICZ - Silvia C. ETCHEGARAY

Universidad Nacional de Río Cuarto
Ruta 36 Km. 601
mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Palabras Clave: conjeturas, razonamiento conjetural, formación de profesores, significados personales.

RESUMEN
En este trabajo pretendemos mostrar algunos avances relacionados con nuestro proyecto de investigación y que tienen que ver con el razonamiento conjetural, es decir con aquel razonamiento que permite elaborar, contrastar y reformular conjeturas. En particular, hemos avanzado en el análisis de significados personales acerca del funcionamiento de este tipo de razonamiento en alumnos del profesorado en Matemática de nuestra universidad, a partir del planteo de tareas específicas en el marco de la asignatura Didáctica de la Matemática II. Este análisis, aunque en su etapa inicial, pone de manifiesto la importancia y la necesidad de que la formación inicial del profesor de matemática "se ocupe" del razonamiento conjetural, generando no sólo instancias de trabajo o situaciones donde el alumno deba ponerlo en funcionamiento sino también instancias donde se reflexione y se explicite el razonamiento utilizado, a fin de desnaturalizarlo y convertirlo en un objeto institucional.

1. FUNDAMENTACIÓN Y OBJETIVOS
En el marco del proyecto de investigación del que formamos parte en nuestra Universidad venimos trabajando, desde hace algún tiempo, en torno al **razonamiento conjetural o plausible**, es decir, **aquel que permite elaborar, contrastar y reformular conjeturas**. (Polya, 1954). Es bien sabido que este tipo de razonamiento juega un papel fundamental en la actividad matemática y tiene un valor en sí mismo en la construcción del conocimiento matemático y de la racionalidad matemática de los alumnos (Panizza, 2005).
En particular, hemos avanzado en la construcción de un **primer marco o significado de referencia institucional acerca del razonamiento conjetural,** en consonancia con lo que se sostiene desde el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, 2003), explicitando el tipo de: **situaciones** en las que el mismo se pone en funcionamiento (es decir, los problemas que "invitan" a elaborar conjeturas), los **procedimientos o acciones** que se ponen en funcionamiento cuando se elabora una conjetura y las **definiciones**, **propiedades** y **argumentaciones** inherentes a este tipo de razonamiento (todos ellos elementos de significado vinculados al razonamiento conjetural, que interactúan dialécticamente y que están regulados por otro elemento fundamental que es el lenguaje). Este primer significado de referencia institucional ha sido presentado y publicado en memorias de diversos congresos de carácter nacional e internacional (Markiewicz, 2005; Markiewicz/Etchegaray, 2006)[1].

[1] En el anexo de este trabajo incluimos solamente una síntesis de los elementos fundamentales que componen dicho marco de referencia, la cual, debemos aclarar, no atrapa todos los aspectos que han sido analizados ni las relaciones entre los mismos que regulan su funcionamiento en cada contexto particular.

En trabajos anteriores (Markiewicz/Etchegaray,2010; Markiewicz/Etchegaray, 2011) ya hemos destacado también la importancia y la necesidad de que la formación inicial de los profesores de matemática contemple espacios de trabajo, reflexión y explicitación acerca de este tipo de razonamiento, de manera tal de brindar al futuro profesor nuevas herramientas que le permitan diseñar e implementar procesos de enseñanza que involucren la elaboración de conjeturas en sus clases y analizar profundamente las producciones de sus futuros alumnos en estas situaciones. También hemos sostenido que esto se puede implementar a través de un trabajo transversal en todas las asignaturas del profesorado, en donde se planteen situaciones en las que el alumno tenga la necesidad de elaborar, contrastar y reformular conjeturas, acompañado de un trabajo específico en asignaturas como Didáctica de la Matemática, donde se apunte a un trabajo de reflexión y de explicitación acerca de las características del razonamiento utilizado, a fin de desnaturalizarlo colectivamente y convertirlo en objeto institucional.

Para ello, tratamos de adoptar una actitud acorde con el EOS, que rescata la importancia de enseñar a los futuros maestros (en nuestro caso, futuros profesores) con la misma metodología que intentamos transmitirles. (Godino y Batanero (2008)). En el marco del EOS se sostiene la idea de que si queremos que los alumnos se apropien de un determinado objeto es necesario que desarrollen sistemas de prácticas personales que se vayan acoplando progresivamente a los sistemas de prácticas de referencia. Además, este marco sostiene el origen sistémico y complejo del significado de un objeto, como emergente de tales sistemas de prácticas asociadas a un campo de problemas, relativos a una institución y dependiente del tiempo. (Godino, 2003). Todo esto nos ayuda a centrar nuestra atención en el estudio de las relaciones entre los significados institucionales y los personales construidos por los alumnos durante su formación inicial. Sabemos que los procesos mentales individuales condicionan el aprendizaje de los estudiantes, sin embargo también sabemos de la potencia de las investigaciones didácticas sobre los condicionantes institucionales en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y que es justamente esa naturaleza sistémica y compleja del constructo: significado de un objeto, el que nos permite orientar el proceso de selección y de evaluación de situaciones de enseñanza. Es así que, en función de ello y con el claro propósito de avanzar en nuestra investigación, nos abocamos en esta etapa a plantear a nuestros alumnos de Didáctica de la Matemática II (correspondiente a 4to. año del profesorado) ciertas tareas que tienen como objetivo poner en funcionamiento sus significados personales acerca del razonamiento conjetural, es decir, lo que ellos reconocen y pueden decir acerca del razonamiento involucrado en la elaboración de conjeturas.

El objetivo central y específico de este trabajo es compartir el análisis que hemos realizado de estos significados personales de alumnos del profesorado, puestos de manifiestos en las tareas propuestas en donde se revisan, se interrogan los "modos" personales de hacer matemática y de entender cómo otro hace, razona y dice la matemática. El fin educativo es lograr desarrollar en nuestros estudiantes del Profesorado mejores condiciones que les permitan poder "entrar en diálogo" con otros.

DESARROLLO

En una primera instancia de análisis, se les presentó a los estudiantes de 4to año dos situaciones problemáticas que, de acuerdo con nuestro significado de referencia institucional, tienen potencial epistémico[2] para poner en funcionamiento el razonamiento conjetural, dado que en cada una de ellas es necesario formular una relación general y en ese proceso se ponen en funcionamiento diferentes procedimientos, argumentaciones y lenguajes. Por otra parte, una de ellas es una situación extra-matemática, un problema que bien puede ser planteado a

[2] El potencial epistémico se traduce, en el marco del EOS, en términos de *idoneidad epistémica*, que hace referencia a la adaptación entre los significados institucionales implementado y de referencia.

alumnos de la escuela media y la otra es una situación intra-matemática, relacionada a objetos que ellos han trabajado en la asignatura Estructuras Algebraicas el año anterior y con los cuales están ya familiarizados. En otras palabras, estas últimas características de las situaciones otorgan a las mismas un alto grado de idoneidad cognitiva[3] que, sumado a la citada idoneidad epistémica, las convierte en potenciales “buenas” situaciones para el objetivo de investigación propuesto.

Para cada una de estas situaciones les planteamos dos tareas: la primera consiste en resolverla, ya que es necesario que ellos tengan un primer contacto con el problema y que cuenten con la explicitación de sus propias relaciones como marco desde el cual poder realizar cualquier análisis; la segunda consiste en pedirles que analicen, desde el punto de vista del razonamiento utilizado, resoluciones de dichas situaciones realizadas por otros alumnos.

A continuación presentaremos cada una de las tareas propuestas, seguidas respectivamente del análisis por nosotros realizado en torno a estas producciones.

TAREA 1

Resuelve el siguiente problema, tratando de explicitar todo lo que pensaste en el transcurso de su resolución.

Si en un torneo de ping-pong se inscribieron n jugadores, ¿cuál será el número total T de partidos que se realizarán si cada jugador juega una vez con cada uno de los jugadores inscriptos? (Chevallard, Bosch y Gascon, 1997)

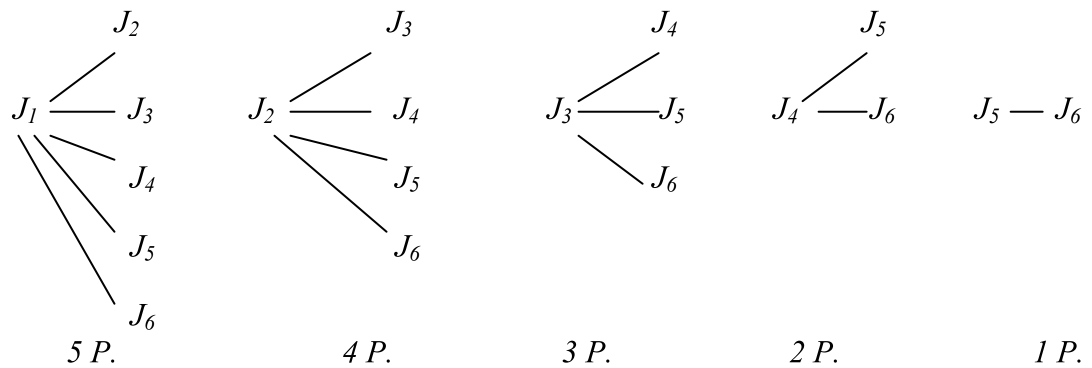
TAREA 2

Analiza cada una de las resoluciones que se presentan a continuación, desde el punto de vista del RAZONAMIENTO utilizado para resolver el problema. Compara dichas resoluciones.

Se presentaron cuatro resoluciones, que fueron tomadas de respuestas que dieron alumnos del secundario y de años anteriores al mismo problema, las cuales fueron elegidas debido a que en ellas se pueden detectar una importante red de relaciones asociadas al razonamiento conjetural. Estas fueron las resoluciones que se les propusieron a los estudiantes para analizar:

Resolución 1

Si n = 6



T = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15

Si tengo n jugadores $\Rightarrow$ *T = (n-1) + (n-2) + …+1.*

$$\text{Pero } \underbrace{(n-1) + (n-2) + \ldots + 1}_{\text{Suma de los primeros } n-1 \text{ números naturales}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

[3] En el marco del EOS la *idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos / implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

Si n = 6 $\rightarrow$ *T* = $\frac{6.(6-1)}{2}=\frac{6.5}{2}=15$

Si n = 4 $\rightarrow$ *T* = $\frac{4(4-1)}{2}=\frac{4.3}{2}=6$

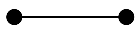
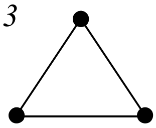
<u>Resolución 2</u>
Si hay 5 jugadores A,B,C,D y E

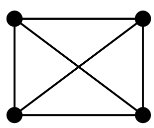
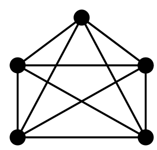
Juegan	*A-B, A-C, A-D, A-E*	*4 partidos*
	B-C, B-D, B-E	*3 partidos*
	C-D, C-E	*2 partidos*
	D-E	*1 partido*

O sea: 4+3+2+1 = 10 partidos.
Si hay n jugadores, serán (n-1) + (n-2) + …+1

Pero si el número n es muy grande, tengo que buscar otra forma.
Puedo tratar de buscar una relación entre n y T:
Si n = 2 $\rightarrow$ *T = 1 T = n.1-1*
Si n = 3 $\rightarrow$ *T = 3 T = n*
Si n = 4 $\rightarrow$ *T = 6 T = n.1+2*
Si n = 5 $\rightarrow$ *T = 10 T = n.2*
Si n = 6 $\rightarrow$ *T = 15 T = n.2+3*
Si n = 7 $\rightarrow$ *T = 21 T = n.3*
Si n es impar, T = $n.\frac{(n-1)}{2}$
Veamos si sirve también para los pares: Si n = 6 $\rightarrow$ *T =* $6.\frac{(6-1)}{2}=15$
Por lo tanto, si n es la cantidad de jugadores, para obtener la cantidad de partidos T, hago
T = $n.\frac{(n-1)}{2}$

<u>Resolución 3</u>

n = 2  *1* *n= 3*  *3*

n = 4  *6* *n= 5*  *10*

Es lo mismo que buscar las diagonales de un polígono de n lados, que era: $\frac{n(n-3)}{2}$

Solo que acá hay que sumar también los lados, o sea: $n+\frac{n(n-3)}{2}$

<u>Resolución 4</u>
Cada jugador tiene que jugar con todos los demás, o sea n-1 partidos.
Como hay n jugadores, serían n.(n-1) partidos.
Pero hay partidos que estoy contando dos veces: A-B, B-A, o sea: $T=\frac{n(n-1)}{2}$

Las conclusiones obtenidas, en particular para la tarea 2, se intentarán resumir a partir de la confrontación realizada entre el análisis "experto"[4] y las producciones de los alumnos. En algunos casos, reforzaremos nuestras afirmaciones con la transcripción de algunas secciones de lo que ellos han escrito, que se presentarán en cursiva y entre comillas.

- En la Resolución 1, por ejemplo, se elabora una conjetura mediante un **procedimiento de generalización a partir de lo que ocurre para "un caso particular" representativo** (n = 6) y, a continuación, se realiza la **verificación de la conjetura en dos casos particulares**: el del inicio y otro diferente. Aquí subyace el **patrón inductivo fundamental del razonamiento plausible,** según el cual **la verificación de una consecuencia de la conjetura hace a la misma más creíble, más plausible** (Polya, 1954).

En el caso de nuestros alumnos, observamos que, en general, pueden explicitar que en esta resolución se parte de un caso particular y se logra elaborar una "*fórmula*" o "*relación general*", aunque no se reconoce explícitamente a la generalización como "procedimiento" utilizado en el proceso de formulación de la misma. Esto se ve reflejado en respuestas como la siguiente:

"*La resolución 1 a partir de un diagrama de árbol elabora una conjetura general, una relación general entre el número de inscriptos y el número de partidos, a partir de lo que sucede en para algunos casos calcula el número total de partidos mediante un modelo aritmético*",

O también:

"*En esta resolución el alumno parte de un caso particular, suponiendo que se inscriben 6 jugadores en el torneo, analizando cuántos partidos se realizarán…. A partir de dicho ejemplo, propone una fórmula general. A continuación, utilizando la fórmula antes mencionada, verifica el resultado del ejemplo del inicio y propone otro ejemplo distinto que lo resuelve con la fórmula hallada*".

También observamos que, sólo en algunos casos, tal como el del primer alumno, hacen referencia a que lo que se elabora es una "conjetura", si bien este alumno expresa que la misma es obtenida a partir de lo que sucede "para algunos casos", lo cual es incorrecto, dado que, tal como lo expresa la segunda alumna, la relación se obtiene a partir de "un" caso particular (n=6). La segunda alumna, por su parte, hace referencia a la consiguiente verificación de la conjetura en casos particulares, relación que muchos alumnos no consideran, aunque en este caso y como sucede con la totalidad de la muestra, no hay ninguna referencia al porqué de la necesidad de realizar tal verificación.

- Respecto de la Resolución 2, vemos que, en general, reconocen que, en la primera parte de la resolución, se procede de la misma manera que en la resolución 1 (**generalización a partir de un caso particular** (n=5)), aunque a través de otro tipo de representación del ejemplo observado, mediante la cual se llega a que T es la suma de los primeros n-1 números naturales. Pero la mayoría no puede explicitar la diferencia con lo que ocurre en la segunda parte de la resolución, donde el alumno utiliza **inducción empírica: partiendo de la observación de casos particulares de n, trata de hallar una regularidad en la relación entre n y T** (la cual es hallada en este caso para los n impares), **y de encajar esta relación en una fórmula general:** T = $n.\frac{(n-1)}{2}$, **obteniendo así una nueva conjetura** que luego es **verificada en un caso muy diferente, en que n es par, para luego ser generalizada a todo n**. En general, sólo expresan que nuevamente la relación es construida a partir de ejemplos particulares. Como muestra de esto, transcribimos la siguiente producción:

[4] Llamamos así al análisis llevado a cabo por nosotros como investigadores y confrontando con el marco de referencia institucional. Se usarán negritas para identificar los elementos de significados que se corresponden con dicho marco de referencia.

"*El alumno que realiza la resolución 2 parte de un ejemplo para encontrar el total de partidos a jugar, y a partir de ello presenta una generalidad para un cierto n. Pero la fórmula general parece complicarse cuando el n es muy grande, por lo que plantea buscar para estos casos, una relación entre el total de jugadores inscriptos y el total de partidos, partiendo de ejemplos. Una vez hallada dicha relación, el alumno corrobora que valga para cuando n es impar o par, y a modo de conclusión responde al problema dando la relación encontrada para cualquier n*"
Es decir, no queda del todo clara la diferencia en la forma de razonar en la primera parte de la resolución y en la segunda, es decir notamos cierta confusión al tener que distinguir entre la **generalización a partir de un caso particular** e **inducción empírica**. Además expresa que una vez hallada la relación se corrobora para n impar y par, cuando, en realidad la relación es hallada a partir de la observación de los n impares y luego se la corrobora para un n par.

- Respecto de la resolución 3, observamos que la mayoría de los alumnos hace referencia al uso "*figuras geométricas*", "*gráficos*" o "*un modelo geométrico para contar*", que les permite llegar a la conclusión de que el número de partidos jugados por n jugadores es igual al número de diagonales de un polígono de n lados más la suma de los lados.
A manera de ejemplo, un alumno expresa:
"*En la resolución 3 utiliza un modelo geométrico para contar y utiliza la fórmula para el cálculo del número de diagonales de un polígono de n lados y además le suma los lados"*
Pero no hay referencias explícitas, en ninguno de los casos analizados, a que **se comienza nuevamente observando casos particulares, los cuales se representan de un modo diferente, y esa representación le permite reconocer una analogía entre ambas situaciones**. En esta resolución se pone de manifiesto de manera muy particular cómo un cambio de lenguaje o una representación diferente del problema puede dar lugar a otro tipo de razonamiento (en este caso, una analogía).
-Respecto de la resolución 4, la mayoría expresa simplemente que "*se utiliza una técnica de conteo".*
Dos alumnas, sin embargo, hacen referencia a la diferencia en términos de razonamiento, al expresar que: "*se empieza con generalización*", o que: "***se trabaja a nivel general**, sin recurrir previamente a ejemplos para encontrar regularidades*", Una de ellas, incluso apunta: "*Podríamos decir que es un **razonamiento más deductivo** y sin constatación empírica*".

El segundo problema planteado, como ya se ha mencionado, resulta para los alumnos (futuros docentes) una actividad familiar al pertenecer al contexto de la asignatura Estructuras Algebraicas, correspondiente al 3er. año de la carrera, en la cual una de las autoras de este trabajo se desempeña como docente:

TAREA 1
Resuelve la siguiente situación, tratando de explicitar todo lo que pensaste en el transcurso de su resolución.
*Dado un grupo (G, *). ¿Qué relaciones podrías hallar entre el inverso de operar dos elementos de un grupo y los inversos de cada uno de ellos?*

TAREA 2
Analiza cada una de las resoluciones que se presentan a continuación, desde el punto de vista del RAZONAMIENTO utilizado para resolver el problema. Compara dichas resoluciones.

En este caso, las resoluciones propuestas para analizar fueron las siguientes:

Resolución 1:
En IR – {0} con el producto, sabemos que: $(x.y)^{-1} = x^{-1}. y^{-1}$.

Podríamos decir que, en todo grupo G, $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$

En el cuaterniónico, $(i\,.\,j)^{-1} \neq i^{-1}.\,j^{-1}$

No vale para todos los grupos.

$$(i\,.\,j)^{-1} = j^{-1}.\,i^{-1}$$

$$(j.\,k)^{-1} = k^{-1}.\,j^{-1}$$

Parece que: $\boxed{(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}}$

Pero en algunos grupos $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$

Para que $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$ *tendría que ser:*

$(x * y) * (x^{-1} * y^{-1}) = e$ *(neutro del grupo)*

Y para eso deberían poderse conmutar el y con el x^{-1}*, para que quede:*

$(x * x^{-1}) * (y * y^{-1}) = e\,.\,e = e$
o sea, el grupo tendría que ser abeliano.

$$\boxed{\text{Si el grupo es abeliano} \rightarrow (x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}}$$

<u>Resolución 2</u>
¿Por qué tengo que operar a a.b para obtener el neutro e? $(a.b)\,.\ ¿\ldots\ldots? = e$
$(b^{-1}.\,a^{-1})$?

Veamos si es cierto:

Para que $(a.b)^{-1} = b^{-1}.\,a^{-1}$*, debería ocurrir que:*

$(a.b).\,(b^{-1}.\,a^{-1}) = e$

Pero entonces, $a.(b.b^{-1}).a^{-1} = e$

$\Rightarrow \quad a\,.\,e\,.\,a^{-1} = e$

$\Rightarrow \quad a.\,a^{-1} = e$ *lo cual es verdadero.*

<u>Resolución 3</u>
Sabemos que: $y * y^{-1} = e$ *(por prop. del inverso)*

$\Rightarrow \quad x * (y * y^{-1}) = x * e$ *(operando a izq. ambos miembros por x)*

$\Rightarrow \quad (x * y) * y^{-1} = x$ *(por asociatividad y prop. del neutro)*

$\Rightarrow \quad (x * y) * y^{-1} * x^{-1} = x * x^{-1}$ *(operando a der. ambos miembros por* x^{-1}*)*

$\Rightarrow \quad (x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = e$ *(por asociatividad y prop. del inverso)*

Y como el inverso es único, $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

También aquí presentaremos una síntesis de las conclusiones a las que llegamos al analizar las devoluciones de nuestros alumnos en el caso de la Tarea 2 en relación con el análisis experto.

- En el caso de la resolución 1, en general nuestros alumnos reconocen que se trabaja a partir de ejemplos o casos particulares, pero algunos de ellos no pueden realizar una diferenciación del papel que cada ejemplo desempeña en la elaboración/refutación de la conjetura. Esto se ve reflejado en respuestas como la siguiente:
"*La primer resolución se basa a partir de casos particulares y sólo se realizan conjeturas, sin utilizar razonamiento deductivo*"
Otros pueden realizar, en parte, esta diferenciación de la que hablamos:
"*La primera resolución plantea la relación que conoce de los elementos en cuestión en un grupo conocido particular, y se cuestiona si vale para cualquier grupo con cualquier operación. A la relación que explicita la refuta con un contraejemplo, y plasma una nueva relación, nuevamente a partir de casos particulares, sin demostrarla*".
Es decir, esta última alumna reconoce que primero se trabaja con un ejemplo conocido particular para plantear una primera conjetura, que es posteriormente refutada con un contraejemplo. Lo que no queda claro es que a partir de este mismo contraejemplo (y no de otros casos particulares) se formula la nueva conjetura.
En términos de nuestro significado de referencia, se podría decir que en esta resolución hay un **procedimiento de ensayo y error,** como diría Lakatos (1978**), en el que se elabora una conjetura en función de conocimientos que el alumno dispone de antemano e inmediatamente se la refuta, al encontrarse un contraejemplo.**
Por otra parte, no todos los alumnos pueden explicitar lo que ocurre a continuación, donde se utiliza **otro procedimiento de contrastación y reformulación de la conjetura**, que **consiste en extraer consecuencias de la misma, o lo que es lo mismo buscar condiciones necesarias para que se cumpla, e incorporar esa condición a la conjetura como hipótesis.**
Otros, en cambio, sí mencionan que a continuación:
"*Se trata de ver qué propiedades tienen que tener los grupos donde se cumple:* $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$ *y aquí es donde surge que los grupos abelianos cumplirán que* $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$ *por ser conmutativos*" o:
"*Pero allí no terminó todo, pues a él/ella le interesa saber en que "tipos" de grupos vale la generalización propuesta en su inicio, es por ello que comienza la búsqueda de condiciones necesarias para que valga dicha generalización*".

- En el caso de la resolución 2, la mayoría de los alumnos reconocen que se parte de una pregunta: *"¿cuál es el elemento tal que al operarlo con el elemento (a.b), se obtiene el neutro e?"* y se propone como candidato a $(b^{-1}.a^{-1})$, (**se elabora una conjetura ingenua**), pero la mayor parte de los alumnos expresan que a continuación "*se demuestra que* $(b^{-1}.a^{-1})$ *es el inverso de (a.b)*". Aquí hay una sutil, pero importante diferencia con lo que realmente realiza el resolutor del problema, dado que lo que se hace no es precisamente una demostración deductiva de que $(b^{-1}. a^{-1})$ es el inverso del elemento (a.b) sino que, "se parte de la conjetura": $(a.b)^{-1} = b^{-1}. a^{-1}$ y se van extrayendo consecuencias de ella (observar que trabaja con implicaciones, no con equivalencias), hasta llegar a una proposición que es evidentemente verdadera. Es decir, nuevamente se está **contrastando la conjetura a través de la verificación de consecuencias de la misma. Como se llega a una consecuencia verdadera, esto hace a la conjetura más creíble, más plausible.**
Sólo dos alumnas reconocen, en parte, esta situación y la comparan con lo que ocurre en la resolución 3, donde se procede a través de un modo **de conjeturar deductivo**, en el cual **se parte de una proposición que se sabe que es verdadera y de allí, por un razonamiento puramente deductivo se logra la conjetura deseada**, y la demostración de la misma simultáneamente.
Una de ellas menciona que:

"*La segunda y tercer resolución plantean trabajo deductivo similar viceverso uno con otro, pues:*
- la segunda resolución parte de lo que quiere verificar y llega a lo que conoce de los elementos a relacionar, mientras que:
- la tercera resolución parte de las relaciones conocidas y llega a lo que buscaba"
Otra de las alumnas expresa que:
"*En las resoluciones 2 y 3 la manera de razonar es la misma, solo que en la segunda se parte de algo que se quiere probar y, deduciendo se llega a algo verdadero (conocido por ser G grupo", en cambio en la tercera se parte de algo conocido y se obtiene lo que se quiere probar trabajando deductivamente*".

En general, en la mayoría de los análisis realizados por los alumnos, se nota una dificultad para distinguir entre diferentes formas de contrastación de la conjetura (mediante ejemplos, mediante "pequeños experimentos" que permiten ir extrayendo consecuencias o buscando condiciones) y la demostración deductiva de la propiedad.

Es así como proponemos que la explicitación de aquellos elementos de significado vinculados al razonamiento conjetural que se han podido detectar y el reconocimiento colectivo de aquellos aspectos que están ausentes y/o que necesitan ser interpelados e institucionalizados, resulta fundamental para promover la reflexión acerca de necesarios conocimientos didáctico-matemáticos para el desarrollo de una formación profesional idónea, que son los siguientes (Markiewicz./Etchegaray, 2010):
- las características de las **tareas** planteadas, en cuánto a su potencial para promover el desarrollo del razonamiento conjetural.
- los **procedimientos** involucrados en la elaboración de las conjeturas.
- las **argumentaciones** que se encuentran implícitas en el razonamiento utilizado y que guían la acción, esto es, los patrones de inferencia que subyacen en las diferentes resoluciones.
- las **definiciones** de las cuestiones a las que estamos haciendo referencia: conjetura, inducción, generalización, analogía, contraejemplo, etc.
- las **propiedades** que tiene el tipo de razonamiento utilizado, en particular, el hecho de ser provisional y no definitivo, en el sentido de que en un momento dado, una nueva información puede alterar nuestro grado de certeza en la conclusión a la que arribamos.
- la influencia que tiene en este proceso el **lenguaje**, la familiaridad que los alumnos tengan con los objetos específicos involucrados en una conjetura, las diferentes representaciones disponibles de tales objetos, entre otros.
- los alcances y las limitaciones del tipo de razonamiento utilizado,
- las diferencias entre el conjeturar deductivo frente al conjeturar ingenuo (por inducción, analogía, etc) y la relación dialéctica que se establece entre razonamiento conjetural y deductivo al momento de determinar la validez de la producción matemática.

CONCLUSIONES

En este trabajo quisimos mostrar la importancia, en este tipo de investigación, del análisis de significados personales acerca del razonamiento conjetural en el marco de la formación inicial de estudiantes del Profesorado en Matemática.
Este tipo de análisis nos permite, por una parte, sentar las bases para poder promover la discusión colectiva acerca de los elementos de significados que los propios alumnos del profesorado pueden explicitar sobre el razonamiento conjetural a fin de acoplarlos al significado de referencia institucional propuesto. Pero por sobre todo, pone en evidencia la necesidad de brindarles a los futuros profesores espacios de producción didáctico-matemática como el descripto para que, más allá de poner en funcionamiento "en acto" el razonamiento conjetural, puedan hacerlo explícito, sacarlo de la esfera de lo personal y constituir el punto de

partida para sistematizar herramientas teóricas que les permitan lograr mejores condiciones para analizar las producciones de “otros”.
En otras palabras, este trabajo pone de manifiesto cómo un problema docente, tal como generar mejores condiciones en nuestros alumnos del profesorado para poder entrar en diálogo con sus futuros alumnos, se convierte en un problema de investigación, a saber: la formación del profesor en matemática necesita de espacios específicos de reflexión y explicitación sobre los modos y formas de razonar tanto en los momentos de construcción como de comunicación del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. 1997. Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. (Horsori, Barcelona).
- GODINO, J.D. 2003. Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet. URL: http:// www .ugr . es / ~ jgodino / funciones-semióticas/monografiatfs.pdf
- GODINO, J.D. y BATANERO, C. 2008. Formación de profesores de matemática basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Conferencia invitada al VI CIBEM, Puerto Mont, Chile, Enero 2009. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/~jgodino /eos/ fprofesores_reflexion_guiada_22dic08.pdf
- LAKATOS, I. 1978. Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático. Alianza Editorial, Madrid.
- MARKIEWICZ, M. E. 2007. El rol del razonamiento plausible en la enseñanza de la matemática (Versión resumida de tesis de Maestría). En CD correspondiente a las memorias del 9º Simposio de educación Matemática. Chivilcoy. Argentina
- MARKIEWICZ, M.E., ETCHEGARAY, S. 2006. Algunos resultados de una investigación acerca del razonamiento plausible o conjetural. En actas de la “Primer Reunión Pampeana de Educación Matemática”. Santa Rosa de la Pampa.. Argentina
- MARKIEWICZ, M.E., ETCHEGARAY, S. 2010. La importancia del razonamiento conjetural en la formación de profesores En actas correspondientes a la III Reunión Pampeana de Educación Matemática, Santa Rosa de la Pampa. Argentina.
- MARKIEWICZ, M.E., ETCHEGARAY, S. 2011. Un espacio para el razonamiento conjetural en la formación inicial de profesores. Aceptado para publicar en la Revista de Educación Matemática Digital, recuperable en la siguiente dirección de Internet: www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/
- PANIZZA, M. 2005. Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos Editorial: Libros del Zorzal, Bs. As.
- POLYA, G. 1954. Mathematics and Plausible Reasoning. (Princeton University Press, New Jersey)

ANEXO 1

Síntesis del significado de referencia acerca del razonamiento conjetural

❖ SITUACIONES

- Situaciones que involucran la elaboración de una conjetura, en particular, aquellas en las que es necesario formular una relación general.
- Problemas (ya sea de encontrar o de demostrar) en los que, para su resolución sea útil o necesario recurrir a un caso más general, a un caso particular, o a un caso análogo.
- Situaciones o tareas que involucran aisladamente alguno o algunos de los procedimientos que mencionaremos a continuación.

❖ PROCEDIMIENTOS

➢ Elaboración de conjeturas a través de:

- Inducción:
  - *Observación de casos particulares o ejemplos,*
  - *Sistematización de los casos observados,*
  - *Búsqueda de regularidades;*
  - *Generalización.*
- Analogía: *A partir de la similitud encontrada entre dos o más cosas en algún aspecto, se infiere la similitud de esas cosas en otros aspectos.*
- Generalización: *A partir del cumplimiento de una propiedad en un conjunto de objetos, se infiere el cumplimiento de dicha propiedad en un conjunto mayor que lo contiene.*
- *Ensayo y error a partir de conjeturas ingenuas que van siendo refutadas rápidamente una tras otra.* (Lakatos)
- Conjeturar deductivo: *idear directamente una síntesis para nuestra conjetura a partir de otra proposición emparentada con ella que ya sepamos que es verdadera.*

➢ Contrastación de conjeturas, a través de:

- examen de consecuencias (*es decir, de una proposición que se deduce o desprende de la conjetura).* Puede consistir en:
  - la verificación de la conjetura en un nuevo caso particular aislado.
  - algún tipo de verificación que sirva para todo un conjunto de casos.
  - experimento mental contrastador (*pruebas en donde se parte de la conjetura primitiva y se van sacando consecuencias de ella. En las mismas se puede descomponer la conjetura primitiva en subconjeturas, abriendo nuevas posibilidades de contrastación).*
- examen de un posible motivo *(es decir, de una proposición de la cual se desprende nuestra conjetura)*
- examen de una conjetura rival incompatible *(es decir, de una proposición que no puede ser verdadera al mismo tiempo que la conjetura original)*
- examen de una conjetura análoga.

➢ Reformulación de conjeturas a partir del hallazgo de contraejemplos: globales (que refutan la conjetura) o locales (que refutan alguna de las subconjeturas o lemas)

- mediante redefiniciones de los términos que en ella intervienen
- mediante la reinterpretación del contraejemplo.
- mediante una restricción del dominio de validez de la conjetura
- mediante la identificación del lema (explícito o implícito en la prueba) que es refutado por el contraejemplo y su incorporación a la conjetura como condición.

❖ DEFINICIONES

Definiciones que, de algún modo, están vinculadas a nuestro objeto, entre otras las de:

- **razonamiento plausible**
- **conjetura**
- **inducción**
- **analogía**
- **generalización**
- **especialización**
- **contraejemplo** (considerado este en su aspecto de disparador para la reformulación de una conjetura)

❖ ARGUMENTACIONES

Patrones de inferencia plausible: reglas que muestran condiciones para hacer más o menos creíble una conjetura.

- Patrón inductivo fundamental: "la verificación de una consecuencia hace a la conjetura más creíble".
- La verificación de una consecuencia cuenta más o menos de acuerdo a cómo la nueva consecuencia difiere más o menos de las consecuencias anteriormente verificadas.
- La verificación de una consecuencia cuenta más o menos de acuerdo a si la consecuencia es más o menos improbable en sí misma.
- Nuestra confianza en una conjetura sólo puede disminuir cuando un posible fundamento de la misma es refutado.
- Nuestra confianza en una conjetura sólo puede aumentar cuando una conjetura rival incompatible es refutada.
- Una conjetura es más creíble cuando una conjetura análoga es verdadera.

❖ PROPIEDADES

- El razonamiento plausible es azaroso, provisional y controversial.
- Tiene normas fluidas y no hay una teoría clara y consensuada del mismo.
- Sus patrones de inferencia, considerados en uno de sus aspectos (la dirección) pueden ser considerados impersonales (ya que no dependen de la persona que realiza la inferencia), universales (ya que tampoco depende del contenido) y hasta autosuficientes en cierta forma (porque no necesitan de nada fuera de las premisas para llegar a esa conclusión), pero de ningún modo definitivos. Al considerar el otro aspecto (la magnitud) dejan de ser también impersonales, universales y autosuficientes.