ESTUDIO DE PARTICULARIDADES DEL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL

Marcela Götte y **Ana María Mántica**

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Santa Fe. Argentina

mgotte@fhuc.unl.edu.ar

Categoría del Trabajo: Trabajo de investigación.

Nivel Educativo: Superior.

Palabras clave: geometría 3D - problema- perpendicularidad - paralelismo

Resumen:

Este trabajo es parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es detectar y analizar dificultades y errores cometidos por futuros profesores de matemática en la realización de demostraciones geométricas tridimensionales y categorizar los errores detectados.

Se presentan algunas dificultades que tienen los alumnos, de la cátedra Geometría Euclídea Espacial del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, en la resolución de problemas que involucran los conceptos de perpendicularidad y paralelismo. Estos conceptos son complejos en su aprendizaje, más aún, como se muestra en este estudio, en la geometría del espacio, coincidiendo con lo señalado por Volkert (2008) que la geometría sólida presenta mayor dificultad que la plana.

INTRODUCCIÓN

El análisis de las dificultades observadas en las resoluciones de los problemas de geometría espacial por parte de los alumnos provee información acerca de cómo se construye el conocimiento en ésta área, así como del estado en que éste se encuentra, imprescindible a la hora de realimentar el proceso de enseñanza y de aprendizaje con el fin de mejorar los resultados.

Se pretende detectar, analizar y clasificar los errores de estos alumnos, futuros docentes ya que deficiencias en su formación podrían obstaculizar su desempeño profesional en los distintos niveles educativos, dentro de este campo.

Rico (1997) considera al error como uno de los puntos en los que se establece una línea divisoria entre dos estereotipos de profesor de matemáticas, por un lado, el que considera que el error es un dato objetivo que muestra el desconocimiento de un alumno o de un grupo de alumnos y que debe ser controlado, corregido o, en su defecto, penalizado; y por otro, el que sostiene que el error es la muestra de un conocimiento parcialmente construido, resultado de un proceso en curso a cuya evolución el profesor debe contribuir, cuando ello sea posible, evitando provocar bloqueos, rechazos o sanciones. Propone una alternativa a la primera postura, sosteniendo que los errores y las ideas imprecisas de los alumnos tienen una dimensión positiva. El conflicto entre sus conocimientos anteriores y determinadas situaciones que no encajan con ellos es un paso necesario para reorganizarlos, enriquecerlos y ajustarlos, es decir que se produzca un aprendizaje significativo. El papel del profesor no consiste en evitar el error ni en ignorarlo, sino que debe transmitir a sus alumnos la sensación de que lo que saben es adecuado para determinadas situaciones, aunque no lo es para otras nuevas y que progresar requiere reconocer estas contradicciones y superarlas.

Socas (1997) señala que las dificultades en el aprendizaje de la matemática se pueden organizar en cinco tópicos:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas (Socas, 1997, p. 126)

Con respecto al primer tópico presentado por Socas (1997), distintas investigaciones indican algunas complejidades propias de la Geometría Espacial:

- Volkert (2008) señala que la geometría de los sólidos es mucho más complicada que su homóloga en el plano. En el plano, por ejemplo, existe sólo un tipo de ángulos mientras que en geometría sólida existen tres (ángulos planos, ángulos diedros y ángulos poliedros). Otro ejemplo: en el plano la perpendicularidad se define entre rectas (que además son secantes) mientras que en el espacio se define perpendicularidad entre rectas (que pueden ser no secantes), entre recta y plano y entre planos.
- La representación de las tres dimensiones en dos dimensiones es, difícil de entender como lo señalan distintos autores (Parzyzs, 1991; Gutiérrez, 1998; Ryu,

Chong y Song, 2007; entre otros) y el parecido con los objetos representados es mucho más débil que en la geometría plana.

METODOLOGÍA

El diseño elegido incluye la utilización de métodos empíricos y no empíricos. (Fernández Cano, 1995). Los estudios empíricos son de tipo descriptivo. En la investigación descriptiva, "el investigador cuenta lo ocurrido. [Los estudios descriptivos] observan a individuos, grupos, instituciones, métodos y materiales con el fin de describir, comparar, contrastar, clasificar, analizar e interpretar las entidades y los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación" (Cohen y Manion, 1990, p. 101).

Se estudian los errores y dificultades de alumnos que cursan la asignatura Geometría Euclídea Espacial del Profesorado en Matemática en el año 2012 al resolver problemas de geometría del espacio. La metodología utilizada en el estudio empírico es cualitativa, se persigue el objetivo de realizar una descripción profunda y no de generalizar resultados. Los estudios no empíricos incluyen la búsqueda y el análisis de bibliografía y el estudio de contenidos matemáticos específicos.

Para la recogida de datos se utilizan artefactos escritos y grabaciones en audio y video y fotografías. Los artefactos escritos son producciones de los alumnos correspondientes a una jornada de 3 horas con modalidad de taller que forma parte de las clases de la asignatura. En dicho taller los alumnos trabajaron agrupados en seis grupos de los cuales cinco eran de dos estudiantes y uno de tres. El agrupamiento se realiza por decisión de los alumnos. Esta tarea es requisito para regularizar la asignatura y se encuentra planificada en el programa de la misma. En el taller, los alumnos pueden contar con sus apuntes, libro de texto, guías de prácticas, etc. Además de contar con las producciones escritas de los grupos, se registra en audio las discusiones a través de seis grabadores, uno por grupo.

Se decide trabajar en duplas o tríos ya que de esta forma suponemos que se obtendría, a través de los diálogos naturales entre los integrantes, información que pondría en evidencia las dificultades de los alumnos en las tareas desarrolladas. Luego de esta jornada se realizaron en tres clases subsiguientes a este taller, discusiones en torno a lo producido en parte del taller y se registraron las mismas en audio y video. En estas clases donde se realizó la puesta en común de una de las tareas del taller, los grupos dispusieron de sus producciones escritas pero no la podían modificar. Es importante destacar que se informó a los estudiantes que el trabajo se graba y se filma porque será utilizado en una investigación y accedieron a realizarlo.

También se utilizan entrevistas dirigidas a algunos de los grupos que participaron en el taller, las cuales se registraron en audio, pero no forman parte de lo analizado en esta ponencia.

En el taller mencionado se trabaja con contenidos de la unidad II “Transformaciones en el espacio” del programa de la asignatura. En particular nos centramos en dos conceptos particulares de la misma como son la perpendicularidad y el paralelismo.

RESULTADOS

Dada la extensión permitida para esta ponencia, presentamos un recorte arbitrario, tomando parte de la segunda tarea y las respuestas a la misma de tres de los seis grupos que la realizaron. La elección de los grupos se debe a que en la puesta en común realizada en la siguiente clase al taller, asistieron algunos de los integrantes. En los grupos 1 y 4, todos los integrantes y en el grupo 5, uno de los dos.

Tarea propuesta.

> 2. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar.
> a) Si un plano α contiene a una recta $\overleftrightarrow{a}$ perpendicular a otra recta $\overleftrightarrow{r}$, entonces el plano α es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{r}$.
> d) Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano α, es perpendicular al plano α. .

Algunas consideraciones para estos incisos de la tarea:

- Las proposiciones de ambos incisos son falsas. En el inciso a) se puede tomar como un contraejemplo el caso en que la recta $\overleftrightarrow{r}$ esté incluida en α. En el inciso d) se puede tomar como contraejemplo el caso en que las tres rectas estén incluidas en el plano α, dos de las cuales son paralelas y la tercera perpendicular a dichas paralelas.
- La definición de plano perpendicular a una recta convenida es: “Definición 3. 3: El plano que contiene a todas las perpendiculares a una recta r por un punto M de ella se llama perpendicular a la recta y la recta r se llama perpendicular al plano” (Mántica y Götte, 2007, p. 22).
- Existe un teorema demostrado en el texto relacionado con estas proposiciones: “Teorema 3.5: Si una recta r, es perpendicular a dos rectas a y b secantes entre sí, que se cruzan con ella, es perpendicular al plano que éstas determinan” (Mántica y Götte, 2007, p. 24)

Análisis de las respuestas.

El cuadro siguiente, resume las respuestas de los seis grupos. El grupo 1 (G1) es el de tres integrantes. Las columnas sombreadas, corresponden a los grupos que se seleccionan para analizar en esta ponencia.

		G1	G2	G3	G4	G5	G6
Problema 2	a)	F	F	F	F	V	F
	d)	V	F	V	F	V	V

Observaciones a las justificaciones dadas al problema 2 a).

Grupo 1:

2(a) Falso.

H] $\vec{a} \perp \vec{\pi}$, $\vec{a} \cap \vec{\pi} \neq \phi$.

Sea α el plano que contiene a $\vec{a}$ y $\pi \not\subset \alpha$ Además $\vec{a} \cap \vec{\pi} = M$. Tomemos otra recta s que pasa por M y π no es perpendicular a s.

α es el plano determinado por $\vec{a}$ y $\vec{s}$, luego α no es perpendicular a π pues contiene a la recta $\vec{s}$ que no es perpendicular a $\vec{\pi}$, contradiciendo la definición de plano perpendicular a una recta.

- "α **el** plano que contiene a a y r $\not\subset \alpha$". ¿Consideran que existe un único plano con estas condiciones?
- Consideran una recta cualquiera s con la condición que no sea perpendicular a r y que pase por M, pero luego s está en α . Si α es perpendicular a r, esa recta s no existe.
- Si s existe, con las condiciones dadas, entonces el plano α no es perpendicular a r. La existencia de ese plano es el que tienen que justificar en la proposición.

Grupo 4:

2.(a) Falso, pues si $\pi \subset \alpha$ y $\pi \perp a$ $\Rightarrow$ π no es perpendicular a α

- ¿Por qué r no es perpendicular a α ?

Grupo 5:

2 a) Verdadero. por definición 3.3. Puesto que α es el plano que contiene a todas las rectas perpendiculares a $\vec{r}$

- ¿Consideran el recíproco de la proposición?

Observaciones a las justificaciones dadas al problema 2 d)

Grupo 1:

- No justifican la respuesta.

(d) Verdadero:

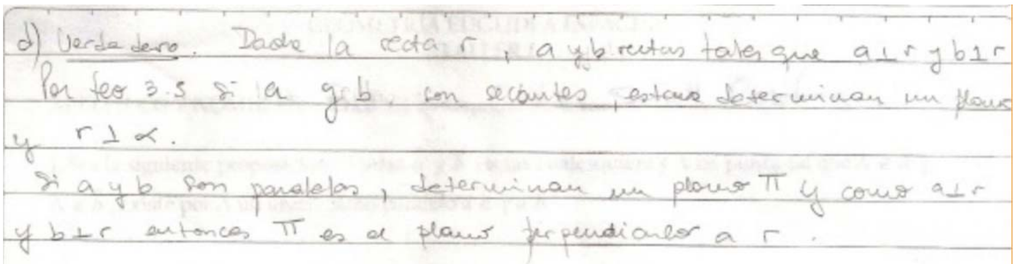
H] $\vec{a} \perp \vec{c}$ $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\bar{a}$ y $\bar{b}$ determinan el plano α.

T] $\vec{c} \perp \alpha$

D] ~~R.A. sup. $\vec{c} \not\perp \alpha$.~~

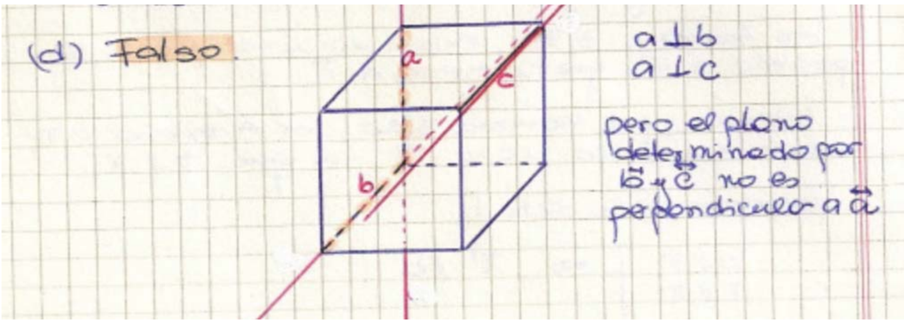
~~(a) si $\vec{c} \not\perp \alpha$ entonces~~

Grupo 4:


d) Verdadero. Dada la recta r, a y b rectas tales que a ⊥ r y b ⊥ r
Por teo 3.5 si a y b son secantes, estas determinan un plano
y r ⊥ α.
Si a y b son paralelas, determinan un plano π y como a ⊥ r
y b ⊥ r entonces π es el plano perpendicular a r.

- En el caso que consideran a y b secantes les falta otra condición para usar el teorema 3.5, que las rectas a y b sean alabeadas con r.
- En el caso de a y b paralelas, no justifican por qué el plano es perpendicular.

Grupo 5:



- Presentan el contraejemplo en un dibujo que parece representar un cubo. No justifican la falsedad de la proposición.

Puesta en común.

De esta puesta en común participaron seis alumnas, la denominada con A_1 pertenece al G5, las denominadas con A_2, A_3 y A_4 al G1 y las denominadas con A_5 y A_6, al G4.

A continuación se transcriben fragmentos del diálogo de la puesta en común del problema 2 a:

> A_1: “α contiene a todas las perpendiculares a la recta r…”
> Profesora: ¿Por qué?
> A_1: Por definición 3. 3. (La alumna lee la definición)
> A_1: “Nosotras interpretamos como… α el plano perpendicular porque contiene a una de las perpendiculares a r… y la definición, contiene… pero no dice que contiene!…
> P: ¿Qué dice la definición?
> A_1: A todas…
> P: Contiene a todas, ¿entonces?
> A_1: Si contiene a todas las perpendiculares es el plano perpendicular, pero yo… a ver… Que contenga a una no me quiere decir que están todas las perpendiculares. Ahí está el error. Pero a ver, y si yo...
> P: Vos decís, ahí está el error, ¿cuál es el error según vos?
> A_1: Suponer que contenga a una tiene que contener a todas, por que yo como dato sé que contiene a una nomás…
> P: Claro…
> A_1: Ahora me doy cuenta. Si contiene a una, ¿qué herramienta tengo para decir que contiene a todas?
> ….
> A_2:… si yo quiero armar ese plano que no es perpendicular. Nosotras habíamos tomado… Esta es la r, tengo la recta perpendicular, tomo otro punto exterior, otra recta que no sea perpendicular a r y este plano supongamos que viene así, que contiene a r pero no es perpendicular porque tengo otra recta que no es perpendicular a r. Pero no sé si ahora, si tomamos bien la recta no perpendicular…
> ….
> A_2: Si yo quiero armar ese plano que no va a ser perpendicular, ¿puedo tomar una recta que no sea perpendicular?, puedo tomar una que sea y una que no sea…
> P: Si? Y ahí se fabricaron el plano que no es perpendicular a la recta. ¿Por qué no es perpendicular a la recta?

A_2: Porque contiene por lo menos a una recta que sabemos no es perpendicular porque la construimos así.
P: Y la definición de plano perpendicular a una recta…
A_2: dice que contiene a todas… Siempre para justificar que no es puedo buscar un contraejemplo y lo puedo construir como yo quiera porque mientras exista uno ya está, deja de ser verdadero.
….
A_5: Nosotras dijimos que era Falso. Para justificar que era falso tomamos que las dos rectas sean secantes y que constituían un plano, entonces, eran perpendiculares en el plano pero no podíamos…
A_6: Pero α no podía ser perpendicular a r.
A_5: el plano no podía serlo.
P: ¿Por qué no podía serlo?
A_5: Porque la contiene…
….
P: Si el plano contiene a las dos rectas, ¿por qué puedo decir que no es perpendicular a la recta?
A_5: Porque no es el ángulo…
….
A_5: Nosotras pusimos que no podían ser perpendiculares porque estaban en el mismo plano…
P: ¿Por qué una recta no es perpendicular a un plano que la contiene?
A_1: La recta perpendicular tiene un solo punto en común con el plano…
P: Pero, ¿la definición dice eso?
A_1: Dice que por un punto…, sí, en realidad sí, porque habla de un punto M al plano y a la recta…
P: Leé la definición entera. (Se lee)
A_1: Si va a estar contenida va a tener todos los puntos…
A_5: Y además va a tener una sola recta… en el plano es perpendicular a una sola recta, no a todas. Ese plano no va a contener a todas…
P: A ver, ahí hay otra cosa…
A_5: No contiene a todas las perpendiculares a ese plano…
P: ¿Por qué?
A_5: Y en el plano mismo porque ella está ahí…
….

A continuación se transcriben fragmentos del diálogo de la puesta en común del problema 2d:

A_2: Queríamos demostrar por el absurdo y no llegábamos a un acuerdo. Nosotras pensamos…
P: Que es verdadero o falso?
A_2: Que es verdadero, porque no encontrábamos un contraejemplo.
P: Pero eso sí, ¿lo acoraron entre las tres?
A_2: Sí. ¿Cómo dice?
A_3: Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano α es perpendicular al plano α
A_2: Entonces, si las dos rectas estaban en α o son paralelas o son secantes. No pueden ser no coplanares. Entonces si, por ejemplo, r es perpendicular a ambas rectas y son paralelas, es posible, porque a no es coplanaria con r, b no es coplanaria con r, puedo trazar un plano perpendicular y entonces van a ser… y si son secantes también…
….
A_2: Teníamos el teorema que decía que si una recta es perpendicular a un plano lo es a toda recta de éste. Entonces queríamos llegar a un absurdo con ese pero no podíamos por el contrarrecíproco…
P: Es decir, que si son paralelas vos decís que es verdadero y ¿ese sí lo pudieron justificar?
A_2: Al final no lo logramos justificar… yo había pensado decir que si a y r son perpendiculares entonces existe un plano que pasa por a y es perpendicular a r. Y si b y r son perpendiculares, existe un plano que pasa por b y es perpendicular a r y esas dos rectas van a estar en un único plano, o sea, que debe ser el mismo, o no? ¿Puede ser eso? No sé si van a ser el mismo…
….
A_3: Yo había pensado suponer que la recta es perpendicular a las dos rectas pero no es perpendicular al plano. Si no es perpendicular al plano, es paralela o secante con el plano. Pero si la recta es paralela al plano yo había dicho que no iba a ser perpendicular a las rectas a y b, pero sí podía ser… podrían ser alabeadas…
….
A_5: Nosotras pusimos que es falsa y lo vimos en la habitación pero después lo representamos.
P: ¿Qué hicieron?
A_5: Nosotros tomamos como r la intersección de las dos paredes, la de la puerta y la del pizarrón, y como a y b tomamos la del piso que es secante con esa recta y la del techo. Entonces como las dos están

contenidas en planos perpendiculares, que son el piso y el techo, van a ser perpendiculares a esta. Principalmente la del techo, que es cruzada.
A_5: Pero ustedes están tomando dos paralelas que no están en un mismo plano!
P: Dos paralelas que no están en un mismo plano?
A_1: Si, porque están en este plano y en este plano… (Señala el techo y el piso)
A_5: No, la recta del piso y del techo, aquella son coplanares…
A_1: Ah, ya entendí…
….
A_6: Por el teorema 3.6 que dice que por un punto P pasa una única recta perpendicular al plano π. Por el punto P intersección de r con a va a pasar una única recta perpendicular al plano α, en nuestro caso, que vamos a suponer que sea r. O por ese teorema ya lo podemos justificar?
P: Justificar que es verdadero o falso?
A_6: No, que es verdadero…
….
A_5: Pero es falso! ¿Querés que lo dibuje y vemos si es verdadero o falso?
….
A_5: Nosotras vimos que ese plano, no lo demostramos, pero nos dimos cuenta que no es perpendicular y es el plano determinado por dos rectas perpendiculares. Lo que después pensamos es que si volvemos a la plana y lo vemos en la pared de atrás, en ésta, esta no es perpendicular a la diagonal.
P: Y entonces?
A_5: no contiene a todas las rectas perpendiculares…
A_4: Contendría a una que no es perpendicular…
A_5: eso, claro
….

Del análisis de estos registros podemos resaltar algunas dificultades que tuvieron estos alumnos al resolver los problemas planteados:

- Si bien, tienen claro que si la proposición es falsa, alcanza un contraejemplo para justificarlo, no les resultó sencillo la resolución de este tipo de problemas, donde tienen que determinar la verdad o falsedad de una proposición. El contraejemplo no siempre es propuesto justificando por qué lo es, como en el caso de la resolución del 2 a) G4 y 2 d) G5 o bien, luego de proponer un contraejemplo para justificar que es falsa, dudar utilizando propiedades y afirmar que la proposición es verdadera (A_6)
- Varios alumnos tienen dificultad en interpretar correctamente las definiciones y teoremas, agregando en ciertos casos hipótesis que no tienen o dejan de lado condiciones que se exigen en las mismas.
- La escritura de las demostraciones es otro punto de conflicto, como puede verse en la resolución de 2 a) G1.
- Necesitan utilizar como soporte elementos de la realidad para imaginarse los conceptos geométricos, lo cual a veces lleva a contradecir principios de la teoría, como por ejemplo que dos rectas paralelas no siempre están en un mismo plano (A_5 en la puesta en común).
- Justifican propiedades desde el dibujo, por ejemplo 2 d) G5.
- Propiedades demostradas en la geometría plana, influyen en concepciones erróneas de las propiedades del espacio, por ejemplo que “la perpendicular por un punto a una recta es única”

▪ Utilizan de modo confuso las propiedades que relacionan los conceptos de perpendicularidad entre rectas, rectas y planos y entre planos

CONCLUSIONES

Los errores demuestran como dice Rico (1997), no la ausencia de conocimientos, sino la existencia de conocimientos que no son adecuados en otros contextos.

Aunque, es necesario un estudio más profundo, podemos situar en principio a las dificultades halladas en los primeros dos tópicos descriptos por Socas (1997). Los conceptos de perpendicularidad y paralelismo son complejos en su aprendizaje, más aún, como se muestra en este estudio, en la geometría del espacio, coincidiendo con Volkert (2008) que la geometría sólida presenta mayor dificultad que la plana.

Propuestas como la presente, donde se donde se pretende generar incertidumbre sobre una particularidad del área, se propicien discusiones entre pares y se pone en consideración en el plenario lo analizado, consideramos puede aportar a develar las complejidades del aprendizaje de la geometría espacial en los futuros profesores. Esto repercutirá positivamente en los otros niveles educativos, donde la geometría sigue siendo relegada y en mayor medida la geometría del espacio.

BIBLIOGRAFÍA

- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.
- Fernández Cano, A. (1995). Metodologías de la Investigación en Educación Matemática. En L. Berenguer, et al. (Eds.). *Investigación en el Aula de Matemáticas*. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *EMA*, 3(3), 193-220.
- Mántica, A y Götte, M. (2007). *Geometría Euclídea Espacial.* Santa Fe: UNL.
- Parzysz, B. (1991). Representations of space and student's conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 575-593.
- Rico, L. (1997). Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En L. Rico Romero (coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp.39-59). Barcelona: Horsori.
- Ryu, H., Chong, Y. y Song, S.H. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. En Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (V. 4, pp. 137-144). Seoul: PME
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico Romero (coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (pp.125-154). Barcelona: Horsori.
- Volkert, K. (2008). *The problema of solid geometry.* Recuperado el 7 de julio de 2011 de http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG1/Papers/VOLK.pdf