Obstáculos Didácticos al Trabajar con Números Racionales Positivos al Inicio de la Escolaridad Secundaria

Fernanda Gisel Cámera y Natalia Fátima Sgreccia
Instituto Aire Libre y Escuela de Educación Secundaria Técnica Nº 6.
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario.
fernandacamera@hotmail.com, nataliasgreccia@hotmail.com

Resumen

En la presente investigación se analizan los obstáculos didácticos emergentes en las clases de un primer año de escuela secundaria en Argentina cuando se trabaja con números racionales positivos. Los obstáculos didácticos engloban aquellas decisiones desacertadas por parte del profesor en situación de enseñanza. A través de un estudio cualitativo, con alcance descriptivo y particularmente mediante el análisis de contenido, fue posible reconocer 12 tipos de obstáculos didácticos. Se los caracteriza mediante una denominación y la familia de situaciones (palabras o acciones) observadas que les dieron origen. Para finalizar se realizan algunas recomendaciones para continuar el trabajo a nivel formación inicial y continua de profesores.

Palabras Clave: Números racionales positivos; Obstáculos didácticos; Escuela secundaria.

Presentación

Ingresar a la Educación Secundaria Básica (ESB) representa cambios en las formas de conocer en matemática a las que los alumnos necesitan adaptarse como parte del proceso de aprendizaje. En la ESB se profundiza el trabajo de desprender los conocimientos de las situaciones específicas en las que se construyen la reflexión de esos conocimientos como objetos de la matemática, sus propiedades y las relaciones que guardan entre sí. Los alumnos necesitan apoyarse en construcciones conocidas para lograr aprendizajes nuevos: este trabajo implica un delicado equilibrio entre lo conocido y lo nuevo.

En particular los estudiantes vienen trabajando con números racionales positivos desde la educación primaria (aproximadamente dos años antes de comenzar su educación secundaria). Sin embargo, en nuestra experiencia docente venimos observando variadas limitaciones provocadas por el significado de la relación parte-todo.

Las fracciones son parte de nuestra cotidianidad. Su importancia radica en la diversidad de ámbitos en que se requiere su buen empleo: académico, laboral, económico, social, comunicacional. El hecho de que los alumnos de primer año reconozcan que hay operaciones o situaciones que no se pueden resolver trabajando solo con números naturales, y que sí pueden hacerlo con los números racionales positivos, tiene importancia no solamente en la práctica al resolver estas cuestiones, sino que va a ser el primer escalón para entender las siguientes ampliaciones de los conjuntos numéricos que trabajarán en los próximos años.

De acuerdo a lo establecido en el Diseño Curricular para la Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires (Dirección General de Cultura y Educación, 2006) con relación a los números racionales positivos, en primer año se debe:

- Estudiar el orden mediante la resolución de problemas.
- Promover estrategias de cálculo para estimar resultados, analizando y fundamentando diferentes formas de resolver.
- Plantear problemas que impliquen el uso de las operaciones y sus propiedades, y que amplíen o profundicen los significados de los números racionales en sus diferentes representaciones.
- Estudiar la fracción como: cociente y su expresión decimal, razón, probabilidad, porcentaje, punto en una recta numérica.

Numerosos y muy diversos son los trabajos encontrados que hacen referencia al tema de la presente investigación. Hay producciones que analizan la didáctica de la enseñanza de los números racionales, generalmente representados como fracción (Flores y Martínez, 2009; García y Cabañas, 2013; Ríos, 2007) y proponen estrategias para poder lograr un aprendizaje significativo (Carmona, Lisi Astorga y Aliendro, 2014; Cortes y Pérez, 2004; Valdemoros y Ruiz, 2008). También se ha accedido a trabajos relacionados con obstáculos, matemáticos en general o de contenidos asociados en particular (Andrade, 2011; Cortina, Zúñiga y Visnovska, 2013; Pruzzo, 2012).

En particular, este artículo se focaliza en comunicar aquellos obstáculos didácticos[1] presentes en las prácticas de enseñanza de los números racionales positivos de un primer año de una escuela secundaria del norte de la provincia de Buenos Aires. Se propende, a partir de ello, delinear algunas propuestas que contribuyan a la superación de los obstáculos emergentes.

NOCIÓN DE OBSTÁCULO DIDÁCTICO

Las dificultades que se generan en los alumnos en el proceso de aprendizaje de la matemática tienen diversas naturalezas. Algunas, con origen en el macrosistema educativo y, en general, en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Por eso, las dificultades

[1] En un estudio más amplio (Cámera, 2016) se analizaron, además, obstáculos epistemológicos y ontogenéticos. Dada la riqueza de los obstáculos didácticos por sí mismos, en esta ocasión se optó por focalizar en los mismos.

pueden abordarse desde varias perspectivas según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemática, métodos de enseñanza.

Según Socas (1997), estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y, por lo general, se manifiestan en los alumnos en forma de errores. El error es considerado por el autor como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, no como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste.

Se entiende por obstáculos de aprendizaje a las nociones o ideas, deficiencias de conocimiento, actitudes o creencias que en los hechos no permiten a los alumnos la asimilación completa de nuevos conocimientos. Un obstáculo cognitivo es un conocimiento que tiene un aspecto negativo y otro positivo. Funciona negativamente porque se interpone a lo que debería ser conocido, pero a la vez, tiene un funcionamiento positivo, ya que es parte constitutiva del mismo conocimiento que está a la espera de ser alcanzado y por tanto es necesario. Según Brousseau (1983), este funcionamiento, positivo y negativo, tiende a ser ignorado en el momento de las explicaciones de los errores de los alumnos.

El concepto de obstáculo fue introducido por primera vez por el filósofo francés Bachelard (1938) en el contexto de las ciencias experimentales y bajo la denominación de obstáculo epistemológico. Identifica varias clases, según surjan desde: la tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas; la tendencia a generalizar, que puede ocultar la particularidad de la situación; el lenguaje natural. Las define en el contexto del desarrollo del pensamiento científico en general, no en términos de experiencias de aprendizaje específicas, individuales.

El concepto de obstáculo es retomado por Brousseau (1986) en didáctica de la matemática, adaptándolo al contexto de la práctica educativa. Afirma que el error y el fracaso no tienen el rol simplificado que en ocasiones uno quiere hacerles jugar. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertitud, del azar que se cree desde las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino que se trata del efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, están constituidos por obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del estudiante, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido.

Duroux (1982) propone una lista -con algunas modificaciones hechas por Brousseau (1983)- de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo a una concepción:

- Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad o una falta de conocimiento.
- Este conocimiento produce respuestas adaptadas en un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
- Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.

- Este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se lo confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- "Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continúa manifestándose de forma intempestiva y obstinada" (Brousseau, 1989, p.43).

Brousseau (1983) argumenta -en la misma línea que Duroux (1982)- insistiendo en que hay que distinguir entre un "obstáculo" y una "dificultad":

> Muy a menudo, es entre las "dificultades" donde hay que buscar los indicios de los obstáculos, pero para satisfacer la primera condición que dice que un obstáculo es un conocimiento, el investigador deberá hacer un esfuerzo para reformular la "dificultad" que estudia en términos, no de una falta de conocimiento, sino de conocimiento (falso, incompleto…) (p.190).

Pero, además, es necesario establecer no solo los errores, dificultades y resistencias que ese obstáculo produce, sino también el dominio donde se revela eficaz. "Y hay que hacer notar que no basta con identificar las dificultades y los fracasos del conocimiento-obstáculo, sino también, y sobre todo, sus éxitos" (Brousseau, 1983, p.192).

Brousseau (1983) distingue tres obstáculos presentes en el sistema didáctico atendiendo a su origen, según se sitúen en uno u otro de los polos del sistema didáctico, es decir el alumno, el profesor o el saber (Fig. 1):

- Obstáculos de origen ontogenético o psicogenético, debidos a las limitaciones (neurofisiológicas, por ejemplo) del alumno en un momento dado del desarrollo: él construye conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos.
- Obstáculos de origen didáctico, como resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo; aquí se incluyen las elecciones desacertadas que realiza el profesor en el momento de plantear una situación de enseñanza.

Obstáculos de origen epistemológico, producto de concepciones constitutivas del conocimiento e intrínsecamente relacionadas con el propio concepto matemático, e inherentes a la noción a la que se refieren.

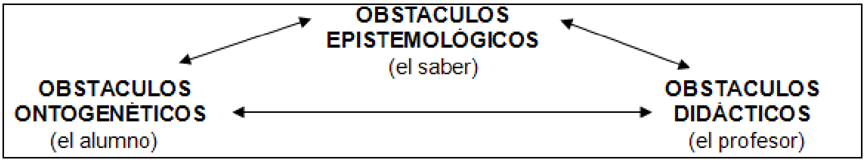

Figura 1. Tipos de obstáculos presentes en el sistema didáctico

El profesor debe conocer los modelos erróneos de los alumnos para poder intervenir creando las condiciones que propenden a superar estos obstáculos así como a progresar en los conocimientos y en la reorganización de los conceptos matemáticos. Según afirma Brousseau (1983), el error ha de jugar un papel importante haciéndolo funcionar como motor de acción y reflexión en situaciones didácticas apropiadas.

Según afirma Núñez (2007), los obstáculos de aprendizaje no son insuperables, pero tampoco son componentes del proceso educativo de fácil solución. Requieren de una identificación de las situaciones que los originan y de sus manifestaciones. Además, se precisa entender su recurrencia temporal y considerarlos como un conocimiento que tiene un dominio de validez, el cual a su vez hay que tratar de acotar. Es así que se necesita entenderlos y definirlos, tener en claro que no son una manifestación de incapacidades de los alumnos sino consecuencias del proceso educativo y de las influencias del entorno cultural del estudiante.

La superación de un obstáculo implica el diseño de acciones racionales que se concreten en una situación didáctica susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al alumno mediante un proceso dialéctico que le permita confrontar sus concepciones anteriores y recrear el nuevo conocimiento. Es decir, se requiere de situaciones didácticas diseñadas de modo tal que los alumnos sean conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y puedan lograrlo.

Brousseau (1983) manifiesta que para superar un obstáculo se requiere un esfuerzo de la misma naturaleza que cuando se establece un conocimiento, es decir, interacciones repetidas y dialécticas del alumno con el objeto de su conocimiento.

Interesa poner de manifiesto los conocimientos adquiridos por el alumno, que responden a una "lógica personal" y que en este momento producen errores. Se trata de superar ese obstáculo, y aceptarlo no como algo que no debiera haber aparecido, sino como algo cuya aparición es interesante, ya que su superación nos va a permitir la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento. Debemos entender que en la superación de ese obstáculo es donde vamos a conseguir el conocimiento nuevo.

LOS NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS Y SUS REPRESENTACIONES

A los alumnos de primer año de secundaria se les presentan los números racionales positivos como aquellos que se pueden escribir como fracción. Se denomina fracción al cociente entre dos números naturales a/b (con b distinto de cero), donde a es el numerador y b el denominador. La idea de fracción surge intuitivamente cuando se pretende dividir una unidad en partes del mismo tamaño (por ejemplo, una torta). Cada uno de los elementos individuales es una parte fraccionaria de la unidad. Conceptualmente, el conjunto de los números enteros y los fraccionarios así obtenidos conforma un conjunto más general, llamado de los números racionales.

El concepto de fracción responde a diferentes interpretaciones y se utiliza en situaciones problemáticas de origen distinto (medir, repartir, comparar). Solo cuando la fracción se entienda en su interpretación numérica (como número racional) se podrá unificar este conglomerado en una estructura coherente y eficaz. Maza (2010) afirma que, mientras tanto, una interpretación puede actuar a modo de obstáculo en el aprendizaje de otras. Existirá una resistencia a aplicar el concepto aprendido en un contexto determinado y dentro de una estructura cognitiva y matemática concreta a otros contextos y estructuras. En el comienzo del aprendizaje se deben diferenciar las distintas acciones que caracterizan los campos de aplicación de las fracciones: repartir, medir y comparar, lo que no excluye su relación posterior. Es decir, es necesario ir de una interpretación a otra.

Tanto los números naturales como los racionales se integran en el concepto de número decimal y este, en sus formas de expresión, puede diferenciarse entre los decimales finitos y los periódicos. El docente accede a la representación interna del conocimiento del alumno por medio de representaciones externas. Maza (2010) define, en sentido amplio, una representación como algo que se coloca en lugar de otra cosa, y señala cuatro tipos: manipulativas (por ejemplo, el plegado de papel para trabajar equivalencia de fracciones), icónicas (gráficos, dibujos, diagramas), lingüísticas (habladas y escritas, por ejemplo “tres cuartos”) y simbólicas (3/4).

Para Gairín (2001), la construcción y manejo de los sistemas de representación permiten evidenciar que:

- Un mismo sistema de representación simbólico admite diferentes significados del objeto representado. Con la notación fraccionaria habitual, a/b, se puede simbolizar una relación entre la parte y el todo, o el cociente de dos números naturales.
- Desde un significado concreto se potencian o dificultan determinados aspectos del concepto matemático: el significado de la fracción como relación parte-todo dificulta la comprensión de las fracciones mayores que la unidad, mientras que el significado de la fracción como razón dificulta la comprensión de la suma de fracciones.

METODOLOGÍA DEL ESTUDIO

Para indagar cuáles son los aspectos que actúan como obstáculos en el proceso de aprendizaje de los números racionales positivos, se adopta un enfoque cualitativo, con alcance descriptivo-interpretativo. El estudio se realiza en los ambientes naturales, donde los participantes se comportan como lo hacen habitualmente en la escuela, puntualmente en la clase de matemática, independientemente del presente trabajo.

Esta investigación se lleva a cabo en una escuela técnica de gestión pública, de la ciudad de San Nicolás (provincia de Buenos Aires), en un primer año que cuenta con 25 alumnos (6 mujeres y 19 varones), que tiene 4 módulos[2] de clase semanalmente (2 horas un día y 2 horas otro día), cuyo docente a cargo es de sexo femenino, con 22 años de antigüedad en la docencia y particularmente 14 años en primer año. No trabajan con un libro de texto de matemática, sino que usan apuntes diseñados por la profesora.

[2] 1 módulo equivale a 1 hora reloj.

La escuela existe desde hace un poco más de 30 años, cuenta con más de 530 estudiantes, ofrece las especialidades de Electrónica y Electromecánica, y tiene un convenio con la Facultad Regional San Nicolás de la Universidad Tecnológica Nacional a través del cual se establecen pautas pedagógicas para la inserción de alumnos egresados de la escuela tanto en la industria como en el nivel superior de estudios.

Los alumnos que ingresan a primer año provienen de varias escuelas de la ciudad. Se les exige que completen un cuadernillo con actividades de los contenidos desarrollados en su educación primaria. Las mismas se corrigen y se explican en las primeras clases y a un mes de iniciado el ciclo lectivo hay una instancia de evaluación niveladora.

La técnica utilizada para obtener la información que se emplea en este artículo es la observación de clases, que consiste en el registro sistemático, válido y confiable de comportamientos o conductas que se manifiestan. En esta investigación la observación se realiza en las 17 clases donde se desarrolla el tema números racionales positivos (comprendidas entre el 11 de julio y el 29 de septiembre, siendo el período escolar de marzo a diciembre). Se observan: las respuestas de los alumnos a las indagaciones del profesor; las preguntas de los estudiantes durante la explicación del tema; el discurso del docente en el desarrollo de la clase; las escrituras en el pizarrón; el trabajo sobre el error; el clima de la clase. Para el registro se emplean notas manuales de campo, a modo de cuadernos de bitácora, y una grabadora de audio, para procurar cierta exhaustividad en lo que los actores pronuncian oralmente en la clase. La estructura de las clases observadas se caracterizó por ser: explicación del tema a través de ejemplos y actividades relacionadas, las cuales son realizadas entre todos en el pizarrón con ayuda de la profesora.

Además, en la investigación completa se han empleado otras técnicas de recolección de datos, tales como: análisis documental de las carpetas de cinco alumnos, grupo enfocado con esos estudiantes y entrevista semiestructurada a la docente.

El procesamiento de datos, como lo indica el alcance del estudio, se realiza desde un punto de vista descriptivo-interpretativo. La información recabada se desmenuza en cuanto al sentido de lo que se está emitiendo y omitiendo, de acuerdo a la técnica de análisis de contenido (Ander-Egg, 2003). Se procede a leer el dato empírico en clave de los referentes teóricos y atendiendo a los objetivos de la investigación.

RESULTADOS

En las observaciones de clase realizadas se encuentran obstáculos ontogenéticos, epistemológicos y didácticos, pero estos últimos son los que con más frecuencia aparecen. En efecto se ha podido armar una tipología de 12 tópicos (OD1 a OD12) o temas dentro del contenido números racionales positivos.

En el **TIPO OD1 "Fracción decimal"** (fue detectad 11 veces en las clases observadas) se ubican aquellos actos de habla o acciones donde la docente da a entender que las fracciones decimales son las únicas que pueden convertirse a expresión decimal. Cada vez que los alumnos obtenían una fracción decimal en el resultado de una operación, tenían que escribirla como expresión decimal y viceversa, pero si estaba involucrado otro tipo de fracción tal demanda de conversión no era realizada por la profesora. En lo que sigue se comparten algunos extractos de los registros.

- *Toda fracción decimal la podemos convertir en un número decimal* ($C_{2\text{-}66}P$)[3].
- *¿Cuándo una fracción es decimal? Cuando su denominador es la unidad seguida de ceros. Y los puedo expresar como números decimales, ¿o no?* ($C_{5\text{-}110}P$).
- *9/10 es una fracción decimal, ¿cómo la puedo expresar como número decimal?* ($C_{9\text{-}34}P$).
- $\sqrt{0{,}25} = \sqrt{\frac{25}{100}} =$ ($C_{11\text{-}217}P$ - $C_{11\text{-}218}P$).
- $(0{,}2)^3 = \left(\frac{2}{10}\right)^3 =$ ($C_{11\text{-}233}P$ - $C_{11\text{-}234}P$).

En el **TIPO OD2 "Simplificación"** (16) la docente les dice a sus alumnos que en la única operación que se puede simplificar antes de resolver es en la multiplicación, sin aclarar que, en realidad, en una división se pueden simplificar los numeradores y denominadores entre sí, o en la suma y resta se puede simplificar cada numerador con su denominador -en caso de fracciones reducibles-.

- *En el único lugar donde puedo simplificar es en la multiplicación* ($C_{9\text{-}56}P$).
- *Nunca se puede simplificar en la suma o en la resta. Nunca* ($C_{9\text{-}71}P$).
- *Cuidado con simplificar dos numeradores o dos denominadores. ¿Quedó claro?* ($C_{9\text{-}76}P$).
- *En la división no se les ocurra simplificar nada* ($C_{11\text{-}116}P$).
- *No… creo que hicimos un cartel donde decía que en la única operación que podemos simplificar es en la multiplicación* ($C_{11\text{-}282}P$).

En el **TIPO OD3 "Signos opuestos e inversos"** (8) se ubican ejemplos donde la profesora disocia al signo del número (en los casos de opuesto) e introduce ambigüedades ("darlo vuelta", "invertirlo", "cambiarlo") cuando se trata de hallar el inverso de un número dado (esto es, un número que multiplicado con el original da como resultado 1 -el neutro del producto-).

- *El opuesto, que es el mismo valor, pero con distinto signo* ($C_{10\text{-}54}P$).
- *¿Qué hago cuando tengo que dividir? ¿Qué hago yo si me tengo que invertir?* ($C_{10\text{-}59}P$)[4].
- *¿Qué es invertir? Darlo vuelta, cambiarlo* ($C_{10\text{-}74}P$).
- *¿Qué es el opuesto? Mismo valor, distinto signo. ¿No lo dicté a eso? ¿Y qué es el inverso? Darlo vuelta. Bueno, el opuesto de 3 es el mismo número, pero cambiado de signo* ($C_{10\text{-}76}P$).

En el **TIPO OD4 "Representaciones y sentidos"** (14) se encuentran ejemplos donde la docente refiere a las representaciones del número racional y el sentido que le da a las mismas. Por

[3] Este código significa que se trata de la de la segunda clase (C_2), particularmente del acto de habla número 66 de la clase en el que puntualmente habla la profesora ($_{66}P$).
[4] Se refiere al inverso de un número, pero qué involucra "invertir a una persona" resulta ambiguo.

ejemplo, en la recta numérica (fracciones equivalentes), en los porcentajes (relativamente simples), en ciertas palabras ("de" - "multiplicación"), en signos (abuso del "="), en las operaciones (división, multiplicación)… imponiendo generalmente una forma de representar que sesga el sentido de lo que se está haciendo.

- *En la recta se colocan las fracciones que da el ejercicio y no las equivalentes que se buscan* ($C_{3\text{-}174}$P - $C_{3\text{-}175}$P)[5].
- *En matemática yo había dicho que el "de" significa "por". (...) El "de" es multiplicación* ($C_{11\text{-}164}$P).
- *Siempre es más fácil verlo con los dos puntitos, pero esa línea es una división* ($C_{11\text{-}134}$P).
- *No uso más el dividido 2. Uso el número representativo. Eso lo usaba cuando no sabía fracción. Pero ahora estamos trabajando con fracciones, así que lo tengo que usar. ¿Qué número me representa la mitad?* ($C_{12\text{-}264}$P).

El **TIPO OD5 "Referencia al todo"** (17) engloba las partes que se están analizando con respecto a algún total. La referencia a la población total estuvo ausente o confusa, llevando en ocasiones a que se aluda a cantidades naturales (por ejemplo personas) mediante números racionales positivos. O cuando solo había que considerar la fracción se agregó "de x".

- *Con la regla de tres sería: 120 sería el 100%, por ejemplo, todos ustedes ¿qué serían? El 100%* ($C_{5\text{-}124}$P).
- *1/10 son varones menores de edad* ($C_{15\text{-}29}$P).
- *Se pudo armar 20 paquetes enteros y me sobró 0,25. Me sobró un puñadito de pan rallado que no pude armar en otro paquete* ($C_{15\text{-}72}$P).
- *Él recorre 3/5, se va a dormir, recorre 1/10 y todavía le falta 135 km* ($C_{15\text{-}86}$P).
- *¿Qué fracción se usa para publicidad? 1/4 de x. ¿Qué fracción se usa para interés general? 3/20 de x. ¿Y qué fracción se usa para científicos y deportes?* ($C_{16\text{-}58}$P).
- *12 años son 5/8, 11 años son 1/4 y 13 años son 3* ($C_{16\text{-}73}$P)[6].

En el **TIPO OD6 "Unidad de medida"** (23) se encuentran situaciones en las que no fue utilizada la unidad de medida o se hizo un uso inapropiado de la misma o se usaba en algunos miembros de una igualdad pero no en todos, apareciendo "mágicamente" en el resultado final. Un empleo adecuado de las unidades de media puede ayudar a comprender, ante una situación dada, qué tipos de datos están en escena y para llegar a qué tipos de metas: ¿son personas?, ¿son paquetes?, ¿son metros?, ¿son kilogramos?, ¿son "partes de"?

- *Para el segundo lo mismo, divido a 572 en 13 partes y tomo 8, o sea que divido por 13 y multiplico el resultado por 8. Me da 352 km* ($C_{4\text{-}282}$P).
- *20% de 90 =* $\frac{20}{100} \cdot 90$ *= $18* ($C_{5\text{-}133}$P - $C_{5\text{-}134}$P).
- *Recuerden que ustedes no van a ir a pedir 5/10 de helado. Piden 1/2* ($C_{11\text{-}220}$P).
- *No ponemos unidad así no hacemos lío* ($C_{16\text{-}101}$P).

---

[5] Los alumnos podrían llegar a interpretar que una cierta fracción y su equivalente no representan al mismo punto en la recta numérica.

[6] Alude a una situación que involucra edades de alumnos que participan en un coro.

- *Entonces, hacemos 7/2 por 4 ¿qué nos da? Si simplificamos dividiendo por 2, nos da 14 metros. Y si hago 3,5 por 4 también nos da 14 metros el perímetro* (C_{16-110}P).

En el **Tipo OD7 "La fracción como número"** (10) se advierten instancias en las que se define a la fracción aparente de manera imprecisa (estas fracciones equivalen a un número entero y su expresión irreducible tiene denominador 1) y se insinúa que las fracciones no son números (pareciera restringir la noción de número a número entero o a la expresión decimal de un racional). También, direcciona a observar la expresión decimal de un número racional para realizar ciertos análisis (decidir si es aparente, compararlo con otro).

- *Las aparentes aparentan ser fracciones, pero no lo son* (C_{1-70}P).
- *Aparente porque aparenta a ser fracción, pero es un número* (C_{3-5}P).
- *Si hubiese sido al revés (o sea 15/5), sí hubiese sido aparente, pero si quiero dividir a 5 por 15, el resultado arranca con 0 coma, así que no puede ser aparente* (C_{1-128}P).
- *¿Cuánto es 1/3? 0,3 periódico ¿o no? Y 1/4 es 0,25* (C_{15-58}P).

En el **Tipo OD8 "Fracciones equivalentes"** (3) se ubican comentarios de la docente en los que la atención se centra en obtener fracciones irreducibles en detrimento del significado en sí de fracciones equivalentes.

- *¿Esa fracción se puede hacer más chiquita?, ¿cómo se llama cuando no se puede simplificar, cuándo no se pueden reducir más?* (C_{1-114}P)[7].
- *En la vida usamos las fracciones simplificadas* (C_{1-189}P)[8].
- *Siempre trabajen con fracciones irreducibles* (C_{10-42}P).

En el **Tipo OD9 "Valor de la fracción"** (2) se ubican los siguientes ejemplos de intervención docente que claramente distorsionan el conocimiento acerca del valor numérico de un número racional expresado como fracción:

- *Si no simplificaba al principio, me quedaba un número gigante* (C_{12-309}P)[9].
- *¿Cuántas veces entra la fracción tres octavos en tres cuartos? Piénsenlo con números pequeños, por ejemplo ¿cuántas veces entra el 3 en el 6?* (C_{15-5}P)[10].

El **Tipo OD10 "Operaciones entre fracciones"** (10) se refiere a las distintas operaciones con fracciones y expresiones decimales de números racionales positivos. La profesora parece imponer un método (por ejemplo, encontrar común denominador para sumar fracciones) y desestimar formas equivalentes de resolución que los estudiantes venían empleando desde la escolaridad primaria (sumar fracciones equivalentes con igual denominador). La docente fomenta la interpretación de dicha equivalencia; peor aún disocia procedimientos construidos previamente. También direcciona en cuanto al momento de simplificar en una multiplicación o cómo proceder en una división. Y, en ocasiones, se desentiende de opciones que comprenden números negativos.

---

[7] La profesora expresa "hacer más chiquita" como si el valor de la fracción cambiara al simplificarla.
[8] No necesariamente es así, por ejemplo "cantidad de simpatizantes de un club determinado en la localidad de tantos habitantes".
[9] Con comentarios como este los alumnos pueden creer que 10000000000/2000000000 es mucho mayor que 1/2.
[10] Pero las fracciones 3/8 y 3/4 son más pequeñas que 3 y 6.

- *Lo que me dice él es lo que hacían en la primaria. Lo que hacían era buscar fracciones equivalentes. Eso era lo que hacían en la primaria, pero es más complicado resolverlo de esa manera cuando tengan que trabajar con ecuaciones* ($C_{8\text{-}28}$P).
- *Siempre vamos a usar este método. No vamos a buscar fracciones equivalentes como lo hacían en la primaria* ($C_{8\text{-}47}$P).
- *Si quieren lo pueden resolver multiplicando todos los numeradores y todos los denominadores y simplificar el resultado final. Pero es mucho más fácil simplificar antes* ($C_{10\text{-}26}$P).
- *Así que, de ahora en más el que aprendió a dividir cruzado, trate de sacarse esa estructura de la cabeza. ¿De acuerdo? No es que esté mal, pero ustedes dividían fracciones pequeñitas, entonces les servía y no había problemas. Acá, para dividir, vamos a explicar lo que verdaderamente es. En matemática, con fracciones, no divido, sino que transformo esa división en una multiplicación* ($C_{10\text{-}44}$P).
- *En este tendría que haber puesto dos sumas para que no me dé negativo, pero bueno, es lo mismo* ($C_{11\text{-}33}$P).

El **Tipo OD11 "Precisión en el lenguaje matemático"** (30) refiere a los momentos en que la profesora no utiliza un lenguaje matemático correcto, ya sea al dirigirse a sus alumnos oralmente o en forma escrita en el pizarrón, o al no ayudar a especificar detalles en respuestas dadas por los alumnos.

- *¿Cómo se llama el de arriba?* ($C_{1\text{-}3}$P)[11].
- *Cuando quiero comparar una fracción propia con una impropia, es menor la propia o al revés* ($C_{3\text{-}209}$P).
- *Como tiene dos cifras decimales, entonces el resultado final también tiene que tener dos cifras decimales* ($C_{5\text{-}90}$P)[12].
- *El porcentaje es nada más y nada menos que una fracción decimal* ($C_{5\text{-}110}$P).
- $\frac{45}{100}\cdot 2500 = 1125 + 2500 = 3625$ ($C_{6\text{-}46}$P - $C_{6\text{-}47}$P).
- *Gastó 87,5% – Quedan $32 = 12,5%* ($C_{7\text{-}5}$A - $C_{7\text{-}6}$P).
- *¿El 2 está dentro de quién?* ($C_{8\text{-}59}$P)[13].
- *Dos números son opuestos cuando tienen mismo valor, pero distinto signo* ($C_{10\text{-}56}$P).
- *Esto lo di para cuando demos las ecuaciones con más de una incógnita* ($C_{13\text{-}20}$P)[14].

En el **Tipo OD12 "Procedimientos"** (31) la docente "marca el camino", directa o indirectamente, en la resolución de las actividades, desatendiendo iniciativas de los estudiantes. En ese direccionamiento se señalan métodos, representaciones, orden en los pasos… sin un sentido de lo que se sugiere ni tampoco un intento de interpretación de sentido de lo planteado por los estudiantes.

---

[11] Se refiere al numerador.
[12] No siempre es así en el producto de números decimales; por ejemplo si la/s última/s cifra de los factores es/son cero.
[13] Se refiere a los múltiplos de 2.
[14] Se refiere a más de un término con la misma incógnita, no a distintas incógnitas.

- *¿Cómo 5/6 por 2? Ah, para buscar igual denominador. Sí, está muy bien. Es un buen método. A mí siempre me gusta pasarlo a número decimal. O el método práctico* (C_{4-161}P).
- *A ver, el que multiplicó primero no está aplicando el concepto de fracción. Cuando trabajemos con operaciones lo pueden hacer así. ¿Qué dice el concepto de fracción? Primero divido en tantas partes como dice el denominador y luego tomo tantas partes como dice el numerador. Eso es lo que yo quiero que apliquen. Es lo mismo, pero no di la parte de operaciones. ¿Quedó claro?* (C_{4-286}P).
- *La regla de tres es útil cuando, por ejemplo, me piden que calcule qué porcentaje representa tanta plata. Al revés de lo que tenía acá. Acá me pedía que calcule cuánta plata es el 40%* (C_{5-128}P).
- *Yo a este ejercicio lo haría como una fracción, que es mucho más rápido* (C_{5-143}P).
- *Siempre dividan primero, que es mucho más fácil* (C_{5-176}P).
- *En este problema me fue más fácil usar fracción decimal. Acá nadie se dio cuenta que para sacar el 20% hay que dividir por 5, ¿se acuerdan que lo dimos?* (C_{6-48}P).
- *Un alumno escribe: 145 ------ 100%. ¿No te conviene hacerlo como fracción decimal?* (C_{7-18}P). *El alumno borra lo anterior y escribe:* $\frac{145}{100}$ *. No, no, no, no. A ver* (C_{7-19}P).
- *La regla es que inviertas la segunda fracción. Solo la segunda, la primera queda igual* (C_{10-99}P).
- *En el "a" no hay una ecuación, así que no la vamos a plantear* (C_{15-40}P).

CONCLUSIONES

Según Socas (1997), el conocimiento nuevo se constituye integrando y luchando contra el saber antiguo. Pero en las clases que se analizan, esa combinación de integración-lucha con el saber que cada estudiante porta no se lleva a cabo, debido a que lo nuevo es impuesto por la misma profesora. Por eso, muchos de los errores de los alumnos tienen origen en un ***obstáculo***, que es un conocimiento falso, inadaptado o incompleto, que no permite la asimilación del nuevo conocimiento, y como dice Brousseau (1989), el obstáculo continúa manifestándose de forma intempestiva y obstinada.

Los ***obstáculos didácticos*** (OD), que con mucha frecuencia se han detectado en las clases observadas, tienen que ver con las elecciones que realiza el profesor en el momento de plantear una situación de enseñanza. En la mayoría de los ejemplos de OD1 la docente dice que toda fracción decimal puede escribirse como número decimal, pero en realidad, tendría que haber dicho que todas las fracciones, y no solo las fracciones decimales, pueden expresarse como números decimales, ya que, justamente, esa es una forma de representación del número racional.
En OD2 hay varios casos en los que la docente dice que solo puede efectuarse una simplificación, antes de resolver la operación, en el producto de fracciones. En realidad tendría que haber aclarado que en la suma y resta no se puede simplificar el numerador de una fracción con el denominador de otra y que en el cociente puede hacerse siempre y cuando sean los numeradores entre sí o los denominadores entre sí.

En OD3, la profesora disocia al signo del número y da una definición imprecisa del inverso de un número. La docente tendría que haber explicado este concepto como “el inverso de un número es tal que multiplicado con ese número, da por resultado el neutro de la multiplicación, es decir, 1”. Esta idea tampoco fue presentada para el opuesto con la operación suma y con el neutro de la adición, o sea, 0.

En OD4, la docente pretende que cuando se representa un grupo de fracciones en la recta numérica, se coloquen las fracciones que se dan en el enunciado de la actividad (irreducibles) y no las equivalentes halladas por los estudiantes. En realidad, debería haberse observado que es lo mismo colocar las dadas inicialmente que las equivalentes obtenidas, ya que representan la misma cantidad, es decir, tienen el mismo valor numérico. Se puede ejemplificar con algunos casos si fuera necesario (representando, por ejemplo, 3/4 y 6/8 en el mismo punto de la recta numérica). De lo contrario, los estudiantes podrían llegar a interpretar que las fracciones equivalentes no están representando al mismo número racional.

En OD5, cuando la docente explica que “1/10 son varones menores de edad” debería decir “1/10 *de la población* (o sea, del total) son varones menores de edad”, ya que la cantidad de personas nunca puede ser 1/10. Esta omisión puede llegar a confundir al alumno.
En OD6 hay ausencia de las unidades de medida en la mayoría de los cálculos realizados, como por ejemplo cuando la docente escribe en el pizarrón: 20% de 90 = $\frac{20}{100} \cdot 90$ = $18, se puede observar que se omite colocar las unidades para que resulte una igualdad. El signo “$” aparece “por arte de magia” solo en el resultado final. Se debería haber escrito: 20% de $90 = $\frac{20\%}{100\%} \cdot \$90$ = $18.

En OD7, la docente define fracción aparente como “la que aparenta a ser fracción, pero es un número”. Con esto, está diciendo que la fracción aparente no es fracción y que la fracción no es un número. En realidad, debería haber dicho que las fracciones aparentes son equivalentes a fracciones irreducibles con denominador 1, porque el numerador es múltiplo del denominador.

En OD8, la profesora refiere a “hacer chiquita una fracción”, pero en realidad tendría que haber dicho “si la fracción es irreducible o no”. Al expresarlo como lo hizo pareciera que está pensando que la fracción cambia al ser simplificada. Seguramente se refería al numerador y al denominador por separado, pero esto puede confundir a los alumnos.
En otra oportunidad, la docente les dice a los estudiantes que si no simplificaban previamente una fracción les iba a quedar “un número gigante”, pero en realidad, debería aclarar que se trata de una fracción con enteros grandes (OD9).

La profesora comenta que en la escuela primaria, para sumar y restar fracciones buscaban fracciones equivalentes, pero que ahora van a usar “otro método” que les resultará más fácil cuando resuelvan ecuaciones: hallar el denominador común entre los denominadores (OD10).

Aquí la docente pone en escena una antinomia no solo innecesaria sino que artificial, pues efectuar $\frac{2}{6}+\frac{1}{6}$ (lo que hacían en la primaria) es similar a realizar $\frac{2+1}{6}$ (lo que pretenden que hagan a partir de ahora) para calcular, por ejemplo, la suma entre 1/3 y 1/6. Una opción superadora en este sentido puede ser preguntarles cómo lo trabajaron en el nivel anterior y explicar esa operación de varias formas para que los estudiantes decidan por sí mismos la forma de resolverla, comprendiendo a su vez que todas esas formas son correctas y equivalentes entre sí.

En OD11 se encuentran ejemplos donde la docente no ha utilizado de manera precisa el lenguaje matemático, como cuando pregunta el nombre de "el de arriba" y "el de abajo". En realidad debería haber preguntado cómo se llaman el dividendo y el divisor de la fracción o las partes de la fracción. En otra oportunidad dice "cuando quiero comparar una fracción propia con una impropia, es menor la propia o al revés", pero ese "al revés" en realidad debería haberse reemplazado por "es mayor la impropia". Así, resulta confuso para los alumnos.

En OD12 la docente direcciona la forma de resolución de los ejercicios, como por ejemplo cuando dice que "la regla de tres es útil cuando me piden que calcule qué porcentaje representa tanta plata" o "yo a este ejercicio lo haría como fracción, que es mucho más rápido", o "siempre dividan primero, que es mucho más fácil". Claramente se hace notar el "camino" que se marca para la resolución de una actividad. Se recalca alguna acción, connotando como "fácil" tal forma de proceder. La profesora debería dejar a sus alumnos decidir cuál es el método o la forma de resolución apropiada ante un determinado ejercicio, aunque en principio insuma más tiempo.

Nos preguntamos cómo procurar superar los obstáculos encontrados en este trabajo. Para contribuir a ello, se considera propicio hacer llegar los hallazgos de esta investigación a la formación de profesores (tanto inicial como continua) para poder, en la didáctica específica, analizar casos así, reales, con sus peculiaridades, con detenimiento en cada particularidad y no generalidades o ideas globales.

En la escuela se puede proponer, por ejemplo, la realización periódica de reuniones de profesores a cargo del mismo curso para intercambiar opiniones: qué cosas les dicen los alumnos, cómo les contestan, qué es lo que piensan. Es decir, reuniones entre los profesores de Matemática de las distintas divisiones de primer año para trabajar en torno a la enseñanza de los números racionales positivos.

En ocasiones, como en los recreos, la profesora a cargo del curso observado manifestaba opiniones sobre los estudiantes. Muchas veces estos comentarios manifestaban el descontento de la profesora hacia los alumnos, por ejemplo:

> *Un desastre las evaluaciones. Aprobaron cuatro personas. Igual aprobaron más que el otro curso, que no lo hizo ninguno.*
> *En porcentaje calculan cualquier cosa, la verdad es que me dan miedo. No los podés mandar a comprar nada así.*

El discurso matemático escolar refleja una ideología sobre la forma de representar y tratar (didácticamente) los objetos matemáticos en clase, pero a la larga se convierte en un conjunto de restricciones, implícitas o explícitas, que norman la actividad áulica y al discurso escolar mismo. Se trata de una noción teórica (Montiel, 2005) que se refiere a la forma de interpretar, usar y compartir la matemática escolar en una situación escolar. Comprende el conjunto de interacciones entre el profesor y estudiantes, dirigidas por la exposición coherente de los saberes escolares. El conocimiento del docente en el manejo del contenido es fundamental para trascender los obstáculos nombrados en esta investigación. Es posible percibir cómo el discurso matemático escolar puede generar, en los alumnos, deficiencias de conocimiento que no permiten la asimilación completa de uno nuevo, es decir, pueden generar obstáculos que permanecen e imprimen sesgos. Para mejorar la enseñanza de la matemática en general y de los números racionales positivos en particular, conviene conocer hasta qué punto los alumnos pueden llegar a limitar sus oportunidades de aprendizaje si sus representaciones del discurso matemático escolar excluyen conocimientos construidos en años previos de la escolaridad o incluso fuera del aula.
Por otro lado, al continuar pensando en posibilidades de trabajo para contribuir a la superación de los obstáculos identificados en la investigación, aparece como pertinente el uso de distintos recursos tecnológicos en clase, por ejemplo calculadora o computadora.

Con relación al uso de la calculadora, esta permite anticipar e interpretar ciertos resultados y puede ser usada como medio de control de operaciones u otros procesos. La calculadora es un buen elemento para establecer la relación entre fracciones y las expresiones decimales.

Por ejemplo, con las siguientes dos actividades se estudia la idea de que un número racional puede ser el resultado de un reparto y quedar ligado al cociente entre números naturales. A su vez, permite relacionar una fracción con la expresión decimal que se obtiene a partir de dividir el numerador por el denominador de la fracción.

- *Usar la calculadora para encontrar una cuenta entre números naturales que dé por resultado cada uno de estos números. Escribir esas cuentas:*

………………………… = 0,5	*………………………… = 0,15*
………………………… = 0,25	*………………………… = 0,07*
………………………… = 0,500	*………………………… = 1,1*

- *Decidir si estas afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justificarlas.*

  i. El resultado de la cuenta 5:4 es $\frac{5}{4}$.

  ii. Para obtener 4,6 en la calculadora se puede hacer 4:6.

  iii. Al hacer 2:100 se obtiene 0,2.

  iv. La expresión decimal de la fracción $\frac{4}{5}$ *es 4,5.*

uso de la computadora, a través del software matemático GeoGebra por ejemplo, supone una herramienta muy útil tanto para la enseñanza por parte del profesor como para el aprendizaje por parte de los alumnos. Este software permite realizar en forma eficiente ejercicios y explicaciones, como también publicar de manera sencilla las realizaciones en su sitio web, lo que hace que haya publicados muchos applets muy útiles. Las aplicaciones y las posibilidades de "jugar" con los elementos hacen que se encienda el interés del alumno. En particular, para fijar conceptos explicados en clase -como por ejemplo: redondeo de un número decimal, equivalencia entre fracciones, números decimales, porcentaje, fracción impropia, número mixto, comparación de fracciones- se seleccionan las siguientes actividades:

- *www.geogebra.org/m/1421093*. Se trabaja con el redondeo de números decimales. Se pueden deslizar los indicadores en las rectas numéricas para redondear la expresión decimal a los décimos, centésimos y milésimos. A la derecha aparece un casillero que permite comprobar si lo que se realiza es correcto. Si es así, aparece un tilde, sino, una cruz con la respuesta correcta. La posibilidad de palpar distintas formas de aproximar cantidades robustece la noción misma de redondeo de números decimales.
- *www.geogebra.org/m/1442651*. Se puede ir cambiando el numerador y el denominador de la fracción con los deslizadores para observar las equivalencias entre la fracción, su expresión decimal y su porcentaje. También si se marca el casillero de "Fracciones" se puede ver la representación gráfica en sectores circulares de esa fracción y si se marca el de "Decimales" se puede observar la representación gráfica en una recta numérica. Esta variedad de representaciones resulta beneficiosa para el aprendizaje de la matemática en general y de los números racionales especialmente.
- *www.geogebra.org/m/1453329*. Se puede visualizar el pasaje de una fracción impropia a un número mixto y viceversa, con su correspondiente representación en la recta numérica. Al ir cambiando el numerador y el denominador con los deslizadores, cambian también los números racionales en cuestión. Esta disposición esquemática y dinámica de estos modos de representar fracciones impropias favorece el entendimiento del rol que juega cada número natural en la constitución del número racional.
- *www.geogebra.org/m/1463139*. Se puede observar la comparación de fracciones según los distintos casos, es decir, si tienen igual numerador, igual denominador o distinto denominador. Esta comparación se realiza a través de la representación en la recta numérica, utilizando los deslizadores para ir variando numeradores y denominadores. Una vez que se selecciona uno de los casos, se explica brevemente cuál es la fracción mayor, y aparece una opción donde los alumnos pueden practicar con algunos ejercicios. Esta posibilidad de comparar fracciones entre sí, con respecto a sus ubicaciones relativas en la recta numérica, contribuye al sentido de la relación de orden entre los números racionales en cuestión, representados de esa manera.
- *www.geogebra.org/m/70843*. Se muestra gráficamente el producto y cociente entre fracciones. Se pueden visualizar al seleccionar "Realizar Operación". Inmediatamente aparece una opción para simplificar el resultado del producto o cociente. Con esta aplicación se observa claramente que la multiplicación no puede ser interpretada como una suma sucesiva salvo que se multiplique un número natural por un número racional. A veces, el producto de dos números es menor que cada uno de los factores y el cociente de una división puede ser mayor que el dividendo. Estas son algunas de las "rupturas" que surgen en el trabajo con los números racionales (con respecto a lo que sucedía con los números naturales). Contribuye al concepto en sí de estas operaciones (producto y división) entre números racionales positivos, más allá de poder ejecutar una cuenta.

- www.geogebra.org/m/22379. Este applet trabaja con la suma y resta de fracciones propias. Se encuentra la representación gráfica de cada fracción y, a través del deslizador “Llevar el círculo azul sobre el rojo” y de la opción “Fracción equivalente”, se efectúan los algoritmos para su resolución, según si se elige sumar o restar. Encuentra un fuerte apoyo en el registro gráfico para favorecer la comprensión de las operaciones que se están efectuando.
- www.geogebra.org/m/46442. Se pueden resolver situaciones problemáticas sencillas con animaciones. Aquí aparecen problemas de cinco tipos. Eligiendo la opción “Nuevo ejercicio” se obtienen problemas de ese tipo cambiándolo con el deslizador. Una vez resuelto el problema, se pulsa “Comprueba” y se verifica si se lo ha resuelto correctamente. Se involucran fenómenos cotidianos relativamente sencillos en los que intervienen los números racionales positivos y que, más allá de planteos y cálculos, se procura fomentar la interpretación de la situación.

En las clases analizadas se propicia el estudio del orden en Q^+, el uso de operaciones y sus propiedades, así como la resolución de situaciones problemáticas. Pero, a diferencia de lo señalado por el Diseño Curricular (apartado 1), la fracción no es abordada como “probabilidad”. Una actividad clásica es la correspondiente a las cartas españolas. Con ella se puede trabajar, también, la simplificación de fracciones y la transformación a expresión decimal.

- *Calcular la probabilidad de sacar una carta de un mazo de 40 cartas españolas y que salga:*
  - i. *Un cuatro.*
  - ii. *Una figura.*
  - iii. *Una de copas.*
  - iv. *Una de espadas o una de oros.*
  - v. *Una carta par.*
  - vi. *Una carta menor que diez.*
  - vii. *Un trece.*

Se considera que estas actividades pueden constituirse, por los motivos que se fueron señalando, en una forma relativamente viable de contribuir a superar los obstáculos identificados en las clases de primer año relativas a números racionales positivos. Claro está que toda propuesta depende en última instancia del contexto específico donde se implementa, conformado por la institución, el docente, los estudiantes.
A través de este trabajo, se ha podido conocer los tres tipos de obstáculos en el proceso de aprendizaje de los números racionales positivos en el caso analizado. En particular, la mayoría de dichos obstáculos son didácticos (los aquí analizados), que básicamente tuvieron que ver con una cuestión disciplinar, pedagógica y actitudinal de la docente a cargo.

Por ello, a pesar de contar con una gran variedad de trabajos encontrados relacionados al tema de esta investigación, se puede percibir que sigue habiendo indicios de que el discurso matemático escolar en torno a este tema está “debilitado”. Por eso, es importante seguir con esta línea de investigación para poder mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula. Y, sobre todo y como se mencionara previamente, idear los modos de transferir los hallazgos en la formación docente. Una forma de hacerlo es analizar de manera conjunta cada uno de los tipos de obstáculos identificados en esta investigación, al estilo que se lo hizo aquí: qué subyace en ellos y cómo se podría contribuir a su superación.

En el aula de matemática los alumnos deben producir, individual y colectivamente, a partir de las tareas que propone el docente, y deben poder sostener discusiones coordinadas por ese docente, en torno a la producción propia y a la ajena. Los problemas que plantea el profesor son el punto de partida del trabajo (Sessa, 2015). Esto quiere decir que el trabajo no se agota solamente resolviendo problemas; los problemas son la base para desplegar un trabajo sobre el cual se va a proponer a veces una reflexión, otras veces una generalización y otras una discusión en torno a diferentes resoluciones. Todas estas son nuevas tareas que el docente tiene que desplegar a partir de las resoluciones de los estudiantes. El hecho de que los alumnos de primer año reconozcan que hay operaciones o situaciones que no se pueden resolver trabajando solo con números naturales, y que sí pueden hacerlo con los números racionales positivos, tiene importancia no solamente en la práctica al resolver ciertas cuestiones, sino que va a ser el primer escalón para entender las siguientes ampliaciones de los conjuntos numéricos que trabajarán en sus próximos años. Por lo tanto, si la presente investigación contribuye a cuestionar y repensar, aunque sea por un momento, nuestra forma de proceder frente a la clase, ya ha cumplido con el fin principal para el cual fue pensada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información.* Buenos Aires: Lumen.

Andrade, C. (2011). Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y la formación de docentes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 24*, 999-1007.

Bachelard, G. (1938). *La Formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épitémologiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. Córdoba: Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs* (pp. 41-63). Ottawa: CIRADE.

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las Matemáticas. *Revista Educación Matemática, 12*(1), 5-38.

Brousseau, G. (2008). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 3. Rationals and decimals as linear functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*, 153-176.

Cámera, F. (2016). *Obstáculos en el proceso de aprendizaje de los números racionales positivos en alumnos de primer año de una escuela secundaria de la ciudad de San Nicolás*. Tesina de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática no publicada. San Nicolás: Universidad Tecnológica Nacional.

Carmona, A., Lisi, M., Astorga, A. y Aliendro, E. (2014). Rescate fraccionario. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27*, 727-735.

Cortes, H. y Pérez, L. (2004). Algunas dificultades en la comprensión y aplicación del concepto de número fraccionario. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 228-234.

Cortina, J., Zúñiga, C. y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Revista Educación Matemática, 25*(2), 7-29.

Dirección General de Cultura y Educación (2006). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria. 1° año (7° ESB). Matemática* (pp.171-195). Buenos Aires: Gobierno de la Provincia de Buenos Aires.

Duroux, A. (1982). *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. Memoria de DE*. Burdeos: Publicaciones de L`IREM.

Flores, R. y Martínez, G. (2009). Una construcción de significado de la operatividad de los números fraccionarios. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 509-516.

Gairín, J. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros de formación. *Contextos educativos, 4*, 137-159.

García, I. y Cabañas, G. (2013). El concepto de fracción en situaciones de medición, división y la relación parte-todo con estudiantes de nivel superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26*, 213-221.

Maza, C. (2010). *Fracciones y decimales*. México: Paidós.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioespistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. México: CICATA-IPN.

Núñez, R. (2007). Obstáculos para el logro de aprendizajes en matemáticas. *Eutopía: Revista del colegio de Ciencias y Humanidades para el bachillerato, 2*, 57-62.

Pérez, A. (1995). La representación en la resolución de problemas en Matemática. *Revista Laurus, 2*(1), 20-25.

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? *Revista Pilquen. Sección Psicopedagogía, 14*(8), 1-14.

Ríos, J. (2007). Ingeniería Didáctica referida al concepto de fracción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*, 270-275.

Sessa, C. (Coord.). (2015). *Hacer Matemática 7/1. Ejemplar para el docente*. Buenos Aires: Estrada.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (pp. 125-154). Barcelona: Universidad de Barcelona.

Valdemoros, E. y Ruiz, E. (2008). Reconocimiento de algunas dificultades en la práctica docente sobre la enseñanza de fracciones: Estudio de caso. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21*, 616-626.