C26

LO QUE EL PROFESOR ENSEÑA VS LO QUE EL ALUMNO APRENDE: UN CASO PARA REFLEXIONAR

Patricia DETZEL, María Elena RUIZ

Universidad Nacional del Comahue
Buenos Aires 1400, Neuquén, Argentina
pdetzel@gmail.com ruiz.melena@gmail.com

Nivel Educativo: Medio y Superior.

Palabras Clave: interacción alumno contenido, discurso profesor.

RESUMEN

Como docentes, es común reflexionar sobre nuestra práctica relacionada con la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Pero en algunas ocasiones, nos enfrentamos con situaciones que nos permiten indagar por qué nuestros alumnos hacen lo que hacen y así comprender un poco más acerca de la compleja actividad que es aprender. Y es grande la satisfacción de poder encontrar una posible explicación que vaya más allá de frases comunes y repetidas como "el problema es que no estudian", "no saben estudiar", "tienen nivel muy bajo", etc.
Nuestro marco de referencia son las teorías existentes en relación con la enseñanza de la matemática, G. Brousseau con la "théorie des situations didactiques", I. Chevallard con la "théorie de la transposition didactique" y los aportes de la Mathematical Education entre los que podemos mencionar investigadores como Shoenfeld.
En este trabajo presentaremos algunos hechos significativos ocurridos en clases de matemática con alumnos universitarios de primer año de la carrera de Contador Público y su análisis usando el marco de referencia explicitado.
Nuestra intención aquí es, a partir de la descripción y comprensión de algunos hechos significativos en clases, poner en evidencia la importancia de las experiencias o las interacciones que tienen los alumnos con los conocimientos matemáticos por sobre el discurso del profesor.

LO QUE EL PROFESOR ENSEÑA VS LO QUE EL ALUMNO APRENDE

Una práctica generalizada de enseñanza de Matemática en la Universidad

Un modo usual de impartir la enseñanza de la matemática en las universidades es distribuir las clases en teoría y práctica, en general se procura que esta distribución se dé en forma equitativa.
El contrato didáctico (Brousseau, 1998) establecido tiene dos maneras diferentes de relación al saber muy distintos. Como expresa Alagia (1998), "el contrato es diferente en cada caso, en la teoría se utiliza el discurso de la presentación de las nociones y resultados matemáticos, mientras que en la práctica se establece, aunque sea parcialmente, un contrato de aprendizaje empirista."

Las clases teóricas tienen por objetivo explicar a los alumnos los conceptos, nociones matemáticas, sus definiciones, propiedades, propiciando el análisis de los alcances y los límites de los mismos. En general son expositivas siendo el pizarrón el instrumento más usado. El desarrollo de los contenidos responde a lo que Brousseau (1986) describe como una presentación axiomática en el sentido que “a cada instante se definen los objetos que se estudian con la ayuda de nociones introducidas precedentemente, y así se organiza la adquisición de nuevos conocimientos con la ayuda de los anteriores”.
En relación a las clases prácticas, su desarrollo está a cargo del profesor asistente, quien cuenta con la colaboración de los ayudantes de docencia. Las mismas tienen por objetivo afianzar y profundizar los conceptos trabajados en las clases teóricas.
Se utiliza como instrumento una guía de ejercicios y problemas, organizados por temas en los Trabajos prácticos, para que los alumnos resuelvan. Como plantea Alagia (1998), “al resolver problemas formalmente ligados al discurso de la teoría se supone que hay un proceso de adquisición de estrategias y destrezas matemáticas.”
La metodología de trabajo es grupal o individual (esto depende de los alumnos y del tipo de ejercicios o problemas). En una primera instancia los alumnos resuelven los ejercicios y problemas propuestos, mientras los profesores los acompañan, evacuando dudas, orientándolos en las tareas que tienen que desarrollar, etc. Luego se realiza en forma conjunta, para toda la clase, en el pizarrón, la corrección de algunos ejercicios, se discute el procedimiento de resolución de los alumnos y se propone, si fuera necesario, otras formas de resoluciones. Para la corrección se eligen aquellos ejercicios más representativos o aquellos que les presentaron mayor dificultad a los alumnos.
Para la coordinación de las clases teóricas y prácticas se procura realizar reuniones periódicas del profesor con el asistente y los ayudantes. En las mismas, se abordan los temas que hacen a la marcha del trabajo en las clases, las evaluaciones parciales, los conceptos matemáticos que se van desarrollando, etc.

Hechos significativos en la enseñanza de Sistema de ecuaciones lineales

En la carrera de Contador Público de la UNCo, una de las materias que los alumnos cursan en primer año es Matemática 1, materia con gran cantidad de alumnos (alrededor de 200 en el aula) y en la que hemos estado a cargo del dictado de la misma durante varios años. En esta asignatura, uno de los tópicos es Sistemas de Ecuaciones Lineales.
A continuación describiremos sólo aquellos extractos de las clases teóricas y prácticas que nos serán de utilidad para comprender mejor los episodios que nos interesa analizar.
En las clases teóricas, el profesor expone, entre otros temas, a qué se denomina sistema homogéneo:

Un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo
si todos sus términos independientes son ceros.

Luego provee algunos ejemplos como el que sigue:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 5x+y-2z=0 \end{cases} \quad (1)$$

A continuación se trabaja sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Se explica, entre otras cosas, la relación que debe darse en un sistema reducido por Gauss, entre la cantidad de ecuaciones y la de incógnitas, para determinar si el sistema es compatible indeterminado, compatible determinado o incompatible.
Es decir, después de aplicar el método de resolución por “eliminación de Gauss”:
si el sistema tiene una ecuación del tipo

$$0x_1+0x_2+0x_3+\ldots+0x_n=b \quad y \quad b\neq 0 \quad (2)$$

éste no tiene solución, entonces se dice que es incompatible.
Caso contrario, pueden darse dos posibilidades:
- si el sistema reducido tiene igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas, éste tiene una única solución y se dice que es compatible determinado.
- si el sistema reducido tiene menos cantidad de ecuaciones que de incógnitas, entonces tiene infinitas soluciones y se dice que es compatible indeterminado.
Cada uno de los casos se ilustra con ejemplos.
Durante el desarrollo de las clases prácticas, los alumnos resuelven los ejercicios y/o problemas propuestos en la Guía del trabajo práctico correspondiente. Los ejercicios a resolver son del tipo "hallar el conjunto de solución de ecuaciones lineales", "resolver sistemas de ecuaciones lineales por distintos métodos e indicar la compatibilidad de los mismos", "estudiar los posibles valores de coeficientes indicados para que el sistema resulte compatible o incompatible", "resolver problemas", "dar ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales con determinadas condiciones", etc.
Las clases teóricas y prácticas se desarrollaron según lo previsto, sin sucesos que nos llamaran la atención. Es en la evaluación donde aparecen hechos significativos que queremos compartir aquí.
En el examen final de la asignatura, nos encontramos con respuestas dadas por los alumnos que nos inquietaron. Por ejemplo:
En uno de los ejercicios se pedía "analice si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

El sistema $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 4x+5y=0 \end{cases}$ es homogéneo" (3)

Varias de las respuestas dadas por los alumnos eran del tipo:

Verdadera porque las ecuaciones están igualadas a cero.
El sistema es homogéneo porque está igualado a cero.

Ante este tipo de respuestas nos surge la duda si es un problema de la manera de expresarse o del conocimiento matemático que se pone en juego para decidir. Es decir, pareciera ser que no analizan, precisamente, los términos independientes.
Dada esta situación y ante la duda planteada anteriormente, decidimos en otra evaluación final, proponer sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos igualados a cero, como el siguiente:
"Analice si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

El sistema $\begin{cases} 2x-3+y=0 \\ 2-2x+3y=0 \end{cases}$ es homogéneo" (4)

En este caso, también, las respuestas dadas por varios alumnos siguen siendo del tipo "*la afirmación es verdadera, el sistema es homogéneo porque sus ecuaciones están igualadas a cero".*
Ahora sí, estas respuestas nos dan una información más precisa. Varios de nuestros alumnos para decidir si un sistema es homogéneo, no analizan si los términos independientes son ceros, pues el término independiente en la primera ecuación es 3 y en la segunda es -2.
En relación a la resolución de sistemas hubo otro hecho significativo que también nos llamó la atención.
Frente a una situación de resolver y analizar si un sistema dado es compatible determinado o indeterminado, aparecía en forma frecuente expresiones de los alumnos del tipo:

Un sistema es Compatible indeterminado porque se anula una fila…
Un sistema es Compatible indeterminado porque hay una fila toda de ceros…
Como se anula una ecuación el sistema es Compatible indeterminado…

Aquí también observamos, como en el caso anterior, que los alumnos para decidir, no ponen en juego el contenido matemático correspondiente. Es decir, para analizar la compatibilidad de un sistema no consideran la relación entre la cantidad de ecuaciones y de incógnitas del sistema reducido por Gauss, tal como se expuso en la teoría.
Este tipo de respuestas nos preocuparon y fueron tratadas en las reuniones con los profesores de la cátedra. En principio no encontrábamos explicación alguna ya que ningún profesor, ni en práctica ni en teoría, había expresado estas afirmaciones. Entonces nos llevó a la búsqueda de respuestas a las preguntas de ¿qué sucedió?, ¿por qué los alumnos concluyen con tales afirmaciones?
Teníamos la sensación de que esta situación nos estaba ilustrando una frase que expresó Alagia (1998) en relación al texto del saber y disociaciones: “El orden de aprendizaje no es isomorfo al orden de *la exposición del saber*, el aprendizaje del saber no es un calco del texto del saber. Ocurre como si se dijera implícitamente: le voy a enseñar esto pero Ud. aprende esto otro”. Esto nos está diciendo que uno enseña y cree que el alumno va a aprender exactamente eso, pero sin embargo no es así.
Analizamos, entonces, las actividades propuestas en el trabajo práctico, ya que esto nos iba a dar información acerca de las oportunidades que le estábamos brindando al alumno de relacionarse con dicho contenido.
En este análisis observamos que en los sistemas de ecuaciones lineales propuestos en el práctico, en su mayoría (22 sobre 25) eran sistemas de igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas, de los cuales 9 de ellos correspondían a sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y 13 de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Además todos los sistemas cuyas ecuaciones estaban igualadas a cero eran homogéneos, es decir en el trabajo práctico no aparece ningún sistema cuyas ecuaciones estén igualadas a cero, que no sea homogéneo.
Creemos que la explicación a los hechos mencionados, no estaba en las expresiones o explicaciones que los profesores dan a sus alumnos, sino en el tipo de tarea que éstos habían tenido que realizar y en las interacciones que habían tenido con ese contenido a través de la resolución de ejercicios.
Brousseau, en diferentes trabajos (1986, 1996, 1998 y 1999), define y organiza diferentes nociones desarrollando la ‘Teoría de las situaciones’, ésta aparece como un medio privilegiado para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos. Para el análisis de los mismos haremos uso de algunos elementos de esta teoría y del ‘enfoque antropológico de didáctica de la matemática’ de Chevallard. Esas nociones son herramientas adaptadas para interpretar y problematizar aspectos de la enseñanza de la matemática que cotidianamente se desarrolla en las aulas (Margolinas, 1997).

Interacciones de los alumnos con sistemas homogéneos

La noción de *interacción de un alumno con el medio* y la clasificación de esas interacciones, nos serán de utilidad en el análisis de las posibles acciones y las decisiones que puede tomar el alumno realizando tareas dadas. Las situaciones de enseñanza generarían *interacciones efectivas o ficticias* del alumno con las nociones. Una situación favorece *interacciones efectivas* del sujeto con las nociones si el conocimiento es necesario al sujeto como medio de decisión; por el contrario las interacciones que se producen son *ficticias* si el conocimiento no es el medio de control del sujeto, aunque esté presente en la situación.
Fregona (1995), define las interacciones de los alumnos con las nociones de la siguiente manera: “la interacción que nosotros llamamos *efectiva* no depende enteramente del actor. Él recibe del exterior sanciones no previstas de su parte. El control es asumido, en parte, por un sistema exterior. Mientras que en una interacción ficticia el conocimiento ‘puede estar realizado’ en la situación pero no se constituye en un medio de decisión, en este caso el *medio* material no ‘reacciona’ ante respuestas inadecuadas. El carácter *efectivo* está ligado a la

relación más que al tipo de elementos de un *medio*. Una relación es *efectiva* cuando exige una confrontación con cierto dominio, ya sea el micro-espacio, el lenguaje, una teoría".
La noción de contrato didáctico (Brousseau, 1998) permite explicar este tipo particular de interacción muy difundido en la enseñanza de la matemática denominado *prácticas ostensivas* o simplemente *ostensión.* Al respecto, Berthelot y Salím (1992) expresan que las llamadas *prácticas ostensivas* describen un conjunto de procedimientos didácticos caracterizados básicamente porque el docente suministra al alumno todos los elementos y relaciones constitutivas de la noción visualizada, mientras que el alumno escucha, observa y resuelve ejercicios de aplicación de las nociones dadas por el docente.
Las actividades como las que presentamos anteriormente, del tipo:
"analice si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

$$\text{El sistema } \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 4x+5y=0 \end{cases} \text{ es homogéneo" (5)}$$

permiten que el alumno dé una respuesta correcta al decidir que el sistema es homogéneo, pero, aparentemente, sin usar la exigencia de la definición: evaluar si los términos independientes son nulos. Pareciera que la definición implícita que usan es "un sistema es homogéneo si sus ecuaciones están igualadas a cero". Es decir, esta actividad da lugar a interacciones del tipo ficticias pues el conocimiento está presente pero no es el medio de decisión.
Este tipo de interacciones son consecuencia de prácticas de enseñanzas ostensivas. Efectivamente, en la presentación, tanto en la teoría como en la práctica, solamente los sistemas homogéneos tenían sus ecuaciones igualadas a cero.
Observemos que en los sistemas de ecuaciones lineales como los siguientes:

$$\begin{cases} 2x+5+3y=0 \\ -1+4x+5y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y=z \\ 4x+2z=5y \end{cases} \ (6)$$

para decidir si son o no homogéneos exige una relación efectiva con su definición, es necesario buscar y evaluar los términos independientes.

Relación del alumno con sistemas compatibles indeterminados

Una noción que nos será de utilidad para el análisis de estos hechos es la de *relación al saber*. Chevallard en una serie de estudios (1985, 1988, 1989, 1992) ha elaborado un sistema teórico en torno a esta noción, para resaltar la dependencia institucional de los conocimientos construidos por los sujetos.
Chevallard (1988) plantea que lo que comúnmente llamamos el saber de un individuo no es otra cosa que su relación al saber considerado. En tal sentido, se refiere a la formación de la *relación* de tal o cual individuo a tal o cual concepto en lugar de la formación de conceptos por parte de un sujeto. Con este concepto de relación al saber se trata de sustituir la escala unidimensional que va del 'saber' al 'no saber 'por un sistema- *la relación*- en el cual se trata de describir el estado en términos de condiciones.
Además, la relación de un sujeto a un objeto, es un emergente del conjunto de prácticas en la que el objeto y el sujeto se encuentran involucrados. El principio general es que los objetos y las relaciones a los objetos sólo viven en el marco de prácticas institucionales y estas prácticas no se reducen a los gestos que se exigen de los sujetos, están fuertemente determinadas por los dispositivos que posibilitan esos gestos.
Según plantea Bosch (1994), la *relación al objeto*, que es también por definición el conocimiento que de dicho objeto tiene la persona, varía del mismo modo que varían los

sistemas de técnicas y tareas en las que se activa el objeto. Las *relaciones personales* vienen determinadas por la sujeción a ciertas prácticas sostenidas por técnicas.
Observemos que en los sistemas propuestos, por tener igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas al reducir el sistema por eliminación de Gauss, si no aparece una ecuación incompatible y se elimina una ecuación, efectivamente el sistema es Compatible indeterminado. Esto nos permite entender por qué los alumnos habían creado esas reglas o definiciones para los sistemas de ecuaciones lineales.
Los alumnos establecen relaciones con los saberes matemáticos a partir de las prácticas o de las experiencias con esos contenidos más que por una exposición de los mismos.
Como afirma Brousseau, en una situación de aprendizaje el alumno debe adaptarse a una situación objetiva (y no una relación dual con el maestro), produciendo él mismo el conocimiento. El conocimiento nuevo es entonces el medio para producir el efecto esperado mediante una estrategia más eficaz, más segura, más económica. Los conocimientos están en competencia y los motivos de aprendizaje son leyes 'económicas' que se manifiestan al alumno.
La regla "Si un sistema reducido por Gauss se elimina una ecuación entonces el sistema es Compatible indeterminado" es el conocimiento producido por los alumnos y es un emergente de las prácticas que los mismos habían tenido que realizar.

CONCLUSIONES

Recordemos que el propósito de este trabajo es comprender algunos hechos significativos en las clases de matemática, no es nuestra intención señalar fragilidades de la enseñanza de la matemática en las universidades.
La problemática de la enseñanza de la matemática en niveles universitarios es compleja. Dan muestra de ello algunos autores. Humberto Alagia en varios artículos y conferencias expone "algunas reflexiones sobre saberes enseñados y saberes textualizados, y acerca de las características de la textualización del saber en diferentes instituciones".
Thurston (1994), que ha escrito sobre la comprensión y la comunicación de la matemática, señala "la transferencia de comprensión de una persona a otra no es automática. Es ardua y requiere habilidad". Frente a esta dificultad tiende a pensarse que una salida es enseñar conocimientos explícitos, es decir exponer un texto del saber y dejar lo otro al "aprendizaje que ocurre".
Brousseau (1986) expone que la presentación axiomática es una presentación clásica de la matemática. Además de las virtudes científicas que se le conocen, parece maravillosamente adaptada para la enseñanza, permite ordenar y acumular en un mínimo de tiempo un máximo de saberes próximos al saber sabio. Sin embargo, el mismo autor alerta, que este tipo de presentaciones produce limitaciones en la relación que establecen los alumnos con los conocimientos matemáticos.
Quisimos ilustrar cuestiones de la problemática de la enseñanza de la matemática, conocidas o familiares, a través de ejemplos y hacer un análisis que nos permita reflexionar sobre éstas desde la teoría.
Muchas veces, como docentes nos preocupamos en una buena exposición del saber y sin darnos cuenta estamos dejando de lado las experiencias que el alumno tiene con ese contenido, las oportunidades que le damos para establecer relaciones, etc. Que efectivamente son las oportunidades de aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA

ALAGIA, H. 1997. Panel Académico sobre Educación y Didáctica de la Matemática, Reunión UMA-REM. (Manuscrito).

ALAGIA, H. 1998. “El discurso matemático y la Reforma educativa ¿un tema para investigar?”. Conferencia dictada en el VIENEM, Sao Leopoldo, Brasil. (Manuscrito).

BERTHELOT, R ET SALIM M H. 1992. *L´enseignement de l´espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse. Université de Bordeaux I.

BOSCH Y CASABÒ, M. 1994. *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

BROUSSEAU, G. 1986. “Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques”, *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol. 7/2. (Ed. La Pensée Sauvage). Grenoble, Francia. Traducción publicada en *Trabajos de Matemática*, Serie B, N° 19, Argentina, 1993, I.M.A.F. U.N. de Córdoba.

BROUSSEAU, G. 1998. *La Théorie des situations didactiques*. Grenoble. Ed. La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU. G. 1996. “L´enseignement dans la théorie des situations didactiques”, en *Actes de l´école d´ete, VIIIº Ecole et Université d´ete de Didactique des Mathématiques. É*dition coodonée par Noirfalise R. IREM de Clermont-Ferrand, Francia.

BROUSSEAU, G. 1999. “Educación y Didáctica de las matemáticas”, en *Educación Matemática.* México.

CHEVALLARD, Y. 1985. *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné,* deuxiéme édition, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. 1988. “Esquisse d´une théorie formelle du didactique, en C. Laborde (Ed), *Actes du Premier colloque franco-allemand en Didactique des Mathématiques le de l´informatique,* Grenoble: La Pensée Sauvage, p.97-106.

CHEVALLARD, Y. 1989. “Le concept de rapport au savoir: rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel”, Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l’Informatique, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. 1992. “Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique” En J. Brun (Ed) *Didactique des Mathématiques* Genève: Delachaux et Niestlé, pp. 145-196.

FREGONA, D. 1995. *Les figures planes comme “milieu”dans l’ enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse Université Bordeaux I, Francia.

MARGOLINAS, C. 1997. Etude de situations didactiques “ordinaires” à l’aide du concept de milieu: détermination d’une situation du professeur, *Actes de la IX° École d’Été de didactique des mathématiques*.