C251-13

LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DESDE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Edgardo GÜICHAL, Graciela GUALA, Ana MALET, Viviana OSCHEROV

Universidad Nacional del Sur - Argentina
Avenida Alem 1253
0291 4595101 (Int: 3435)
eguichal@criba.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Claves: ingeniería didáctica, número real, función real, conocimientos disponibles.

RESUMEN

En el presente trabajo damos cuenta de algunas actividades realizadas y resultados obtenidos en el marco del proyecto de investigación: *La Enseñanza del Cálculo. Articulación entre el Nivel Polimodal y el Nivel Universitario.* En él nos propusimos identificar obstáculos que dificultan la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo para generar estrategias para el mejoramiento de su enseñanza y de su aprendizaje. Como metodología de investigación y para guiar tanto las experiencias en clase como para estudiar los resultados de enseñanza, utilizamos una ingeniería didáctica.
Diseñamos diagnósticos que responden a la necesidad de saber con qué *conocimientos disponibles*, relacionados con aspectos que tienen que ver tanto con el sentido de número como con el sentido de función, cuentan los alumnos que inician el primer año universitario.
Los diagnósticos nos han permitido detectar obstáculos que se presentan en porcentajes significativos, en la comprensión de los objetos matemáticos seleccionados para este proceso.
Los datos obtenidos los interpretamos desde los planos: epistemológico, didáctico y cognitivo.
A partir de los resultados logrados desde las distintas fases del Análisis Preliminar construimos los fundamentos teóricos y prácticos que permitieron elaborar una secuencia didáctica puesta en práctica en el aula y cuyo desarrollo y resultados comentamos.

INTRODUCCIÓN

Enfocamos nuestro objeto de estudio en las prácticas de la enseñanza del Cálculo, en el primer año de carreras universitarias que se desarrollan en la Universidad Nacional del Sur (UNS), especialmente la de Ingeniería Civil.
Hemos observado que el desempeño de los alumnos que ingresan a la UNS, específicamente en el transcurso de los últimos períodos lectivos, ha mostrado déficit en lo referido a las competencias y en contenidos disciplinares básicos de Matemática. Tal déficit se da en cuestiones tales como representaciones parciales y fragmentadas del significado de un concepto, dificultades para relacionar diferentes registros de representación, dificultades para sobrepasar los modos de pensamiento numérico y algebraico. Esta situación plantea

obstáculos al momento de cursar las materias con contenido matemático en los primeros años de las carreras universitarias y sería una de las causas que provoca abandono y deserción durante el primer año de estudio.
Teniendo en cuenta esta realidad y la importancia que tiene el Cálculo, no sólo en el campo disciplinar sino también como herramienta para solucionar problemas de otras disciplinas, nos propusimos identificar cuáles eran los obstáculos que dificultaban la comprensión de sus conceptos fundamentales para pensar y generar estrategias para un mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje.
Entendemos que la situación a la que hacemos referencia es un problema tanto para las previsiones de desarrollo universitario como para las autoridades del nivel educativo previo al universitario (Educación Polimodal) y que un trabajo articulado podría dar lugar a un mejoramiento en las competencias matemáticas de los alumnos de ambos niveles educativos.

REFERENTES TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En nuestro proyecto de investigación enfocamos un problema complejo, multidimensional, como es el enseñar, el aprender y sus resultados. Trabajamos sobre los problemas de articulación entre la escuela media y la universidad en el área de matemática en el marco de una aproximación didáctica. Centramos la investigación sobre un dominio que desempeña un papel significativo en esta articulación y que es el Cálculo.
Esta particularidad nos remite a la formulación de referentes epistemológicos con respecto a una de las dimensiones de nuestro objeto de estudio. En este sentido consideramos para este trabajo la siguiente hipótesis:
Las nociones de número real y las funciones son conceptos en construcción al momento de cursar el primer año universitario, entonces el aprendizaje del Cálculo es un motor para su conceptualización.
Así mismo nos proponemos como uno de los objetivos del Proyecto:
Identificar obstáculos que dificultan la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo, para generar un mejoramiento en el aprendizaje y en la apropiación de los mismos.
Como metodología de investigación y para guiar tanto las experiencias en clase como para estudiar los resultados de enseñanza utilizamos una Ingeniería Didáctica.
En el marco de la Ingeniería Didáctica, la fase del Análisis Preliminar que abarcó:

- Diagnóstico sobre el estado actual de la enseñanza del tema.
- Análisis de documentación referida al tema en ambos niveles.
- Análisis de programas de Educación Polimodal y del de las asignaturas del primer año universitario.
- Análisis de textos de Matemática de Educación Polimodal y de Cálculo para alumnos de primer año universitario.
- Diagnóstico sobre los conocimientos de que disponen los alumnos ingresantes en la Universidad para abordar los contenidos del Cálculo.
- Indagación acerca de las dificultades con el aprendizaje de alumnos recursantes y de las hipótesis que los mismos tienen con respecto a sus dificultades.
- Estudio de las concepciones de los docentes y de las concepciones de los alumnos de ambos niveles, antes de participar en experiencias y después de estas.

Nos permitió construir los fundamentos teóricos y prácticos que orientaron la elaboración de la ingeniería a utilizar en el aula y su puesta en práctica. Actualmente estamos poniendo en práctica un ajuste de la ingeniería desarrollada a partir de la confrontación del análisis a priori y el análisis a posteriori.

En el avance que presentamos en este caso consideramos el Diagnóstico sobre los conocimientos que disponen los alumnos ingresantes a la Universidad para abordar los contenidos del Cálculo y en ese contexto, el caso del Diagnóstico sobre Números Reales y del Diagnóstico sobre Funciones Reales de Una Variable Real, a partir de cuyos resultados pudimos disponer de hipótesis sobre algunas de las dificultades de los alumnos, que junto a los resultados logrados al cumplimentar las distintas fases del Análisis Preliminar nos aportaron una serie de datos a tener en cuenta para la secuencia a utilizar en el aula cuyo desarrollo y resultados comentamos.

CON QUÉ ALUMNOS TRABAJAMOS

Ambos diagnósticos y la puesta en práctica de la secuencia fueron realizados por 67 alumnos ingresantes a la carrera de Ingeniería Civil para los cuales se diseñó la ingeniería a utilizar en el aula. Así mismo debemos mencionar que la institución dicta un Curso de Nivelación durante el mes previo a la iniciación de las clases, optativo, con un examen obligatorio al concluir el mismo, que nuestros alumnos habían cumplimentado

DIAGNÓSTICO DE NÚMEROS REALES Y SUS RESULTADOS

En principio mencionaremos que las actividades propuestas en el diagnóstico se relacionan con aspectos que tienen que ver con lo que entendemos por *sentido del número*, con el cual es necesario contar para iniciarse en el estudio de Cálculo.
Entendemos que se tiene *sentido del número* cuando se puede comprender el significado del uso de distintos tipos de números, compararlos, relacionarlos, reconocer sus magnitudes relativas, distinguir en qué situaciones es pertinente utilizarlos, operar con ellos, juzgar si un resultado numérico es razonable y expresarlo de manera conveniente. Así mismo, cuando se puede interpretar críticamente la información que se presenta en términos numéricos; por ejemplo, mediante gráficas, tablas, porcentajes, datos estadísticos; y se es capaz de percibir regularidades, extraer pautas, investigar y conocer relaciones y propiedades numéricas.
Teniendo en cuenta lo antedicho y a partir de los datos obtenidos en las entrevistas realizadas a docentes de Educación Polimodal (G. Guala et al; 2005) así como del análisis de textos de Matemática destinados a ese nivel, en el Diagnóstico se plantearon actividades relacionadas con:

- Distintas notaciones para los números reales. Notación decimal. Significado de la notación posicional. Aproximaciones.
- Notación particular para los racionales, como cocientes de enteros. Casos que llevan a expresiones decimales periódicas.
- Operaciones algebraicas. Propiedades. Porcentajes. Resolución de ecuaciones lineales.
- Orden. Representación en la recta. Densidad de los números racionales. Compatibilidad con las operaciones algebraicas.
- Completitud.

Con respecto a las habilidades cognitivas, las actividades abarcaron requerimientos acerca de: operar con distintos registros: coloquial, algebraico, gráfico, simbólico; análisis y aplicación de información y resolución de problemas.
Si bien los resultados obtenidos en el análisis del diagnóstico fueron presentados como comunicación en RELME 19 (2005), creemos que es conveniente hacer algunas referencias a ellos para poder comprender las actividades de la secuencia propuesta.
El diagnóstico contiene nueve actividades cuyos resultados nos permiten señalar distintas categorías que señalamos como dificultades.

- Dificultades en reconocer la posibilidad de que el resultado de dividir dos números reales puede ser mayor que el dividendo.

La investigación nos permite reconocer que las dificultades, en algunos casos, guardan relación con el sistema de enseñanza, al trasladar el algoritmo de la división entera al conjunto de los números reales.

Al respecto, resultan interesantes los comentarios de los alumnos que dan cuenta de sus concepciones erróneas al justificar su respuesta. Transcribimos algunos de ellos: *falso, porque al dividendo se lo divide por lo tanto va a ser siempre menor*; *falso, porque el dividendo es el número que estamos fraccionando*; *falso, el dividendo es el número que se "divide en partes" tantas veces como lo indica el divisor*; *falso, porque en una división el cociente es menor que el dividendo ya que a este se le está buscando reducirlo al dividirlo por x unidades.*

- Dificultades en utilizar distintos nombres para elementos geométricos como la base y la altura de un rectángulo.

Este tipo de actividad fue resuelta en general correctamente, pero parece interesante señalar el proceder de un grupo de alumnos que para poder pensar la solución del problema planteado necesitaron traducir el nombre de las variables de x e y a b y h. Esto nos permite inferir que dado que desde los primeros niveles de escolarización los elementos de un rectángulo se designan con b y h, cuando el alumno resuelve la situación problemática, aparece como dificultad la comprensión del sentido de la base y la altura del rectángulo al ser nombrados con x e y.

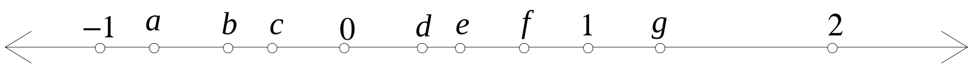
- Dificultades al traducir una expresión coloquial a un registro algebraico.

Son en general correctas las respuestas dadas en los casos en que se dan expresiones coloquiales que suponen una traducción inmediata al registro algebraico. En cambio, la mitad de los alumnos da respuestas incorrectas cuando es necesario construir un modelo algebraico que responda a una situación dada. Es significativo que tampoco recurran a una verificación con la que podrían comprobar lo erróneo del modelo elegido.

- Dificultades en lectura e interpretación de un gráfico

En este caso mencionaremos la actividad propuesta.

Actividad: En el siguiente gráfico se han representado los números reales: –1 , a, b, c, 0, d, e, f, 1, g y 2.



a) ¿Cuál de ellos es el número más próximo a e . f? Explica por qué.
b) ¿Cuál de ellos es el número más próximo a 1 / f ? Explica por qué.
c) Decide si las siguientes afirmaciones son Verdaderas (V), Falsas (F) o si es imposible determinar su validez (ND).

$c_1)\ a>b$ $\quad$ $c_2)\ a.b>d.e$ $\quad$ $c_3)\ \sqrt{b.c}$ no es un número real.

Esta actividad requiere del alumno mayor nivel de abstracción ya que supone una lectura e interpretación del gráfico y uso de propiedades de números. En la misma se consideran números que son datos y otros representados por puntos en el eje real designados con letras con los que se debe operar.

En muchos casos los alumnos colocan por encima de algunas letras un número que consideran aproximado por el lugar que ocupa la letra en la recta. En ese sentido los mismos alumnos expresan: *me complicó no tener valores específicos para las letras; me costaron los dos primeros puntos porque no sabía bien cómo relacionar dos números que no sabía cuáles eran.*

- Dificultades en la comparación de números

Si bien en general las respuestas son correctas aparece un inciso donde al solicitar la colocación del signo "=", ">" o "<", según corresponda en el caso "1 … 0,9999······" la

respuesta casi unánime fue >.
Nuevamente observamos que desde el sistema educativo y de los textos utilizados los alumnos adquieren el uso de reglas que les permiten convertir números periódicos en fracciones, que sin embargo no son utilizadas aquí al plantear una situación fuera del contexto habitual.

- Dificultades en la construcción de modelos que representen una situación dada.

Comentarios sobre los resultados obtenidos

Interpretamos los datos obtenidos basándonos en los distintos planos planteados por Artigue (1995): epistemológico, cognitivo y didáctico, a partir del estudio de los obstáculos que hace Brousseau (1997)

Desde el plano epistemológico

En el conjunto de los Números Reales distinguimos una Estructura Algebraica, una Estructura de Orden y el Axioma de Completitud, a lo que agregamos la recta como "soporte natural" para representarlos. Como resultado del diagnóstico, las entrevistas con docentes del Nivel Polimodal y el análisis de bibliografía del nivel, hemos podido constatar que se prioriza el tratamiento algebraico, no se problematiza la noción de completitud sin la cual no se da la posibilidad de existencia de los irracionales ni tampoco la notación decimal. Cuando se escribe, por ejemplo, 0.999..., no se discute el significado de los puntos suspensivos; tampoco, desde lo geométrico, el hecho de dibujar la recta con un trazo continuo al momento de representar gráficamente los números reales, ni el significado geométrico de continuidad de la recta.

Desde el plano didáctico

Podemos observar que en los últimos años se ha trabajado en la contextualización de los conceptos matemáticos para otorgarles significado. Con el conjunto de los racionales, donde este proceso puede darse a través de problemas de la realidad que se basan en mediciones, esto pareciera razonable. Pero para construir el conjunto de los números reales consideramos que el axioma de completitud es imprescindible ya que, por ejemplo no podemos mostrar la irracionalidad de π o la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ a partir de algún instrumento de medición. Es cierto que se realizan construcciones geométricas para ubicar en la recta las raíces cuadradas de algunos números primos, pero no se plantea que no existen construcciones geométricas clásicas que permitan ubicar números como π, e, o cualquiera de los infinitos números trascendentes, así como tampoco se hace la distinción entre números algebraicos y números trascendentes.
Los alumnos se encontrarían en un nivel "nocional" de las propiedades de los números, generándose a partir de este diagnóstico y como desafío para la situación didáctica el planteamiento de propuestas que permitan movilizar este conocimiento en situaciones complejas y llegar a la construcción del concepto.

Desde el plano cognitivo

Los alumnos muestran la "aplicación" de habilidades cognitivas en contextos similares a los que fueron aprendidas. Ello genera la necesidad de plantear la recuperación y puesta en juego de lo aprendido con respecto a los números reales en la resolución de problemas o en situaciones simuladas o reales diferentes al contexto en que fueron aprendidas, si lo que se pretende es que las habilidades cognitivas se expliciten en saberes que faciliten la operación con las situaciones contextuales, es decir, que articulen la teoría y la práctica.

DIAGNÓSTICO DE FUNCIONES Y SUS RESULTADOS

Con respecto a las funciones reales de una variable real podemos decir que son aspectos centrales del sentido de función: el uso de más de una representación para la misma situación matemática; la habilidad de pasar de una representación a otra cuando es apropiado; la flexibilidad para usar la representación más apropiada para resolver un problema; la habilidad para "ver" una representación cuando se está trabajando en otra; la visualización en un gráfico cartesiano y la realización de operaciones elementales con ellas.

En este diagnóstico organizamos las actividades en cinco tipos y analizamos las respuestas de los alumnos en base a ellos.

Tipo 1

- Actividades en las que se presentan situaciones que permiten trabajar en la lectura e interpretación de gráficas cartesianas (sean o no funciones) y al reconocimiento de las características que definen a una función (existencia y unicidad). No responden a modelos elementales puesto que el objetivo no es la elaboración de modelos sino tener referencia a la capacidad de análisis que permita obtener la máxima información correcta posible sobre la situación representada por la correspondiente gráfica.

Queremos indicar que para trabajar en gráficas cartesianas de las cuales tratamos de obtener información, sean estas representaciones de funciones o no, tomamos como referencia la diferencia que marca Azcárate (1990) entre lectura e interpretación de gráficos. En la primera incluimos cuestiones que tienen que ver con identificación de variables en cada eje, unidad y graduación de los ejes, identificación de puntos de la gráfica, determinación de una coordenada conocida la otra. La segunda es una actividad más compleja, que depende de cada contexto, y que consiste en la capacidad para describir en forma global, atendiendo a las características generales de la gráfica, es decir a las variaciones que presenta. En este sentido en el diagnóstico, se presentan dos actividades mediante gráficos que describen dos situaciones: una relaciona la cantidad de nafta contenida en el tanque de un coche y la distancia recorrida en un viaje de 300 km, la otra relaciona el consumo de agua caliente en un hotel durante el tiempo transcurrido durante las 24 hs. de un día determinado. La primera actividad enfoca la lectura y la segunda, la lectura e interpretación de los gráficos.

Con respecto a las respuestas podemos decir que

- o Los alumnos no presentan mayores dificultades en la lectura.
- o En preguntas donde deben interpretar y obtener información, por ejemplo cuando se pregunta sobre el consumo medio, o qué se puede decir sobre el consumo de agua caliente en un intervalo dado, o sobre el consumo total de agua, donde lo cualitativo también se pone en juego, hay un porcentaje importante que, o no contesta o responde mal.

Una tercera actividad, propone la comparación de ambos gráficos, a los efectos de determinar cuál responde a la definición de función y cuál no, justificando la respuesta.

En este caso, el 63 % de los alumnos no pueden responder correctamente o no pueden justificar.

Tipo 2

- Actividades que permiten la elaboración de modelos a partir de los datos que las mismas proporcionan. Responden a modelos elementales y proponen situaciones en las que resulta necesaria la toma de decisiones.

Se propone un problema referido al alquiler de un automóvil que se puede realizar con dos empresas diferentes. El mismo genera dos modelos, uno con una gráfica de tipo escalonado y el otro de tipo lineal.

Los alumnos reconocen la variable independiente que en cada modelo es distinta, pero solo 2 alumnos grafican correctamente la función escalonada, ya que el resto o no la hace o la toma como función lineal.

Tipo 3

- Actividades, en un contexto disciplinar, en las que las funciones se definen gráficamente y en las que se intenta tener referencia respecto a la capacidad de lectura e interpretación de aspectos generales de la función (dominio, imagen, igualdad y variación) y la composición.

A diferencia de las actividades del primer tipo que respondían a situaciones concretas, la interpretación de los gráficos que definen funciones en intervalos, se hace más dificultosa. Es muy alto el porcentaje, entre un 70 % y un 75 %, de respuestas erróneas en cuanto a la determinación del dominio, la imagen e intervalos de crecimiento. También aparecen errores de notación, como por ejemplo: DOM = R (–4,4) para indicar que el dominio de la función *f* está dado por el intervalo (–4,4).

En cuanto a la actividad referida a la composición de funciones definida en forma gráfica, en general no fue resuelta. Los alumnos expresaron que este tema fue muy poco visto en el secundario y en el ingreso, expresan haberlo visto "por arriba", pero no saben como resolverlo.

Tipo 4

- Actividad relacionada con la investigación de propiedades de linealidad en funciones elementales.

Para esta actividad consideramos funciones definidas en el conjunto de los reales positivos tales como: a) $f(x) = x + 3$; b) $f(x) = \sqrt{x}$; c) $f(x) = -2x$, … consultando a los alumnos sobre cuáles de ellas satisfacían $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para cualquier par de números x_1 y x_2 y cuáles satisfacían $f(cx) = c\ f(x)$, donde c denota a una constante positiva.

En ambos casos ronda el 80 % el número de alumnos que no responde correctamente, aunque en el primer caso el 30 % lo deja sin resolver y en el segundo lo hace el 40 %.

Tipo 5

- Actividades en la que los alumnos deben expresar en forma verbal la relación que existe entre el gráfico de una función (supuesto conocido) y el de otra que se obtiene a partir de ella a través de una composición con una función lineal.

Transcribimos parte del enunciado, para mostrar el nivel de abstracción del mismo:

Suponiendo que es conocido el gráfico correspondiente a la función definida por y = f(x), explique cómo se pueden obtener los gráficos de las funciones siguientes:

a) $y = 5\,f(x)$

b) $y = f(x-5)$

………………

Fueron capaces de responder correctamente el caso en que se producía un desplazamiento horizontal. En los otros, mayoritariamente las respuestas fueron incorrectas, especialmente confundiendo $5f(x)$ con $f(5x)$. En algunos casos respondieron con ejemplos concretos, con gráficos de rectas y parábolas, aunque en ninguno de ellos lograron completar todas las preguntas formuladas.

Análisis de las dificultades

De lo expresado anteriormente podemos decir que los resultados obtenidos nos permiten señalar distintas categorías que señalamos como dificultades:

- de interpretación de gráficos
- en la construcción de modelos
- conceptos previos erróneos e ignorancia de algunos contenidos de notación
- traducción incorrecta de hechos matemáticos descriptos en o de un lenguaje simbólico a otro.
- en el uso del lenguaje matemático

- inherentes al salto cualitativo que supone el paso de un contexto concreto a un contexto matemático formal

El análisis de estas categorías desde los planos propuestos por Artigue, nos permiten observar las interrelaciones entre ellos orientando las interpretaciones siguientes y teniendo en cuenta las manifestaciones de los alumnos en una encuesta realizada con posterioridad al diagnóstico.
Desde lo didáctico se observa la diferencia entre el currículo prescripto, el currículo enseñado y el currículo apropiado por los alumnos. Contenidos que son explicitados en las propuestas curriculares prescriptas y enseñadas en el nivel educativo previo al universitario, al momento de ser requeridos para resolver cuestiones matemáticas referidas a funciones, no "aparecen" o los alumnos explicitan construcciones erróneas.
El alumno no logra reconocer la relación entre los gráficos y la información que éstos le brindan. Los obstáculos cognitivos se manifiestan en expresiones tales como: "*los incisos en los que tenía que decir, lo que se puede decir del gráfico, lo interpreté a medias; lo que me costó es asimilar el tiempo con los metros cúbicos.*"
En el mismo plano podemos señalar las dificultades en la construcción de modelos matemáticos que corresponden a situaciones en distintos contextos, como así mismo respecto a la toma de decisiones: "*costó encontrar la fórmula; no sabía distinguir bien cuál era la variable; me costó sacar cuál convenía más.*"
Es posible detectar características de lo que David Perkins denomina conocimientos frágiles y pensamientos pobres. Estaríamos en una interrelación de los planos cognitivo y epistemológico.
En este sentido, son significativas las respuestas y comentarios referidos a la actividad donde se propone componer funciones.
Es evidente que las operaciones como suma, producto y cociente entre funciones ofrecen menos dificultades al momento de resolverlas, ya que éstas son conocidas desde los primeros años de escolaridad, y pueden extrapolarse fácilmente a nuevos objetos matemáticos como son las funciones. En cambio la composición, que es una operación propia de las funciones, requiere de un conocimiento particular, tanto en lo conceptual como en lo procedimental. "*No recordaba composición, pero lo vi; no sabía qué hacer.*"
En lo epistemológico, el conocimiento matemático estaría caracterizado por cierta "superficialidad". "*Lo vimos por arriba*", nos dicen los alumnos. Además se detectan en este plano, las dificultades de notación, la traducción incorrecta de hechos matemáticos descriptos en o de un lenguaje simbólico a otros: "*si bien lo estudié en el colegio y también en el ingreso no lo tenía fresco a la hora de hacer este ejercicio; no lo tenía muy claro del secundario; lo hice probando pero no sabía por qué era así; me pareció medio complicado, no estoy acostumbrada a que me tomen ejercicios medio teóricos.*"
Otra nota estaría dada por la forma que puede estructurar el pensamiento matemático en la trayectoria escolar donde, el trayecto de aplicación "de la teoría a la resolución del ejercicio", deja un espacio reducido para las situaciones adidácticas, que abren puertas a una construcción del pensamiento matemático alternativo y creativo, lo que nos permitiría explicar las dificultades detectadas con respecto al pasaje de un contexto concreto a un contexto matemático formal.
El análisis de estas dificultades es el punto de partida al momento del diseño de la ingeniería para el trabajo en el aula.

SITUACIONES DIDÁCTICAS PROGRAMADAS PARA EL TRABAJO EN EL AULA

Numerosos trabajos relacionados con los problemas de la enseñanza del Cálculo señalan a los problemas epistemológicos y cognitivos inherentes a la comprensión del concepto de límite como la cuestión clave a tener en cuenta, destacándose que es éste el primer concepto que deben enfrentar los alumnos y que está relacionado con procesos infinitos. Sin embargo, las experiencias que hemos realizado, pensadas desde el punto de vista de una posible articulación entre el nivel preuniversitario y el universitario, nos han llevado a considerar como tema crítico el concepto de *número real*, es decir, enfocaruna etapa previa, ya que entendemos que además de ser éste, junto con el concepto de *función*, las bases para el desarrollo de un curso de Cálculo, es aquél el concepto en que se debe trabajar la idea de proceso infinito, básico en la propiedad fundamental de los números reales, cual es la de *completitud* y su relación con el concepto geométrico de *continuidad* de la recta, que utilizamos como soporte para su representación.

¿Será tal vez porque en el nivel preuniversitario se insiste más en las propiedades del número real como un *objeto matemático*, destacando las propiedades *algebraicas* que verifica, y que no se distinguen de las de los números racionales?

Encontramos teorías sobre educación matemática (Dubinsky, 1992, Sierpinska, 1992, Sfard, 1991) que distinguen entre las etapas de formación de un concepto matemático aquellas que designan justamente con los términos de *proceso* y de *objeto*. Si la etapa de construcción del número real como proceso no se distingue de la del número racional, sobre todo si se construye el número racional como resultado de un proceso de medición (de longitudes, pesos o volúmenes) y se lo identifica con un cociente de enteros, entonces no se entenderá claramente lo que los diferencia.

El procedimiento señalado se logra en un número finito de pasos: dividimos la magnitud en cuestión en *n* partes y tomamos *m* de ellas. El mismo puede ser identificado con un proceso infinito si utilizamos el algoritmo de la división de enteros (y *n* no puede expresarse como resultado de multiplicar potencias de 2 y de 5). Aunque habitualmente se explica en los cursos de ese nivel la relación entre expresiones decimales periódicas y números racionales, parece claro que esa relación no está suficientemente elaborada por los estudiantes, según se observa por las respuestas que se obtienen al pedir una comparación entre 0,9999... y 1.

En base a estas ideas, desarrollamos en el aula una secuencia didáctica siguiendo las observaciones de M. Artigue. Ella remarca el modo diferente de trabajo, entre el pensamiento algebraico y el del cálculo diferencial, para probar, por ejemplo, la igualdad entre dos expresiones A y B. Señala que en general en Álgebra se transforma la igualdad A = B en otras igualdades equivalentes, hasta llegar a una expresión que es evidentemente cierta. En cambio, en el Cálculo, tratamos de comprobar que dado un número real positivo ε arbitrario, se verifica que $|A - B| < \varepsilon$, de donde deducimos que debe ser A = B.

Entrando ya en el terreno de tratar de entender qué distingue a los reales de los números racionales, introdujimos la definición de cota superior (inferior) de un conjunto de números racionales y luego la de supremo (ínfimo) de un conjunto acotado superiormente, como la menor de las cotas superiores.

En esta etapa se propuso a los alumnos un desafío (una especie de juego “desconfío”), donde el docente haciendo el papel de “abogado del diablo”, les planteaba a los alumnos la búsqueda del supremo de algún conjunto. Estos mencionaban cuál era el número que creían que era el supremo y el docente les proponía otro número menor. Para ganar, debían encontrar cada vez, un número del conjunto que fuera más grande que el que el docente sugería. En este juego, al principio el docente tomaba números menores elegidos más o menos al azar, pero luego, si los alumnos decían *a*, les sugería números de la forma $a - 10^{-k}$ y de este modo, poco a poco, resultó natural tomar $a - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$.

Se mencionaba entonces el axioma de completitud e incorporaba ejemplos de conjuntos de números racionales cuyo supremo no podía ser un número racional, de modo tal que realmente fuera necesaria la incorporación de nuevos objetos para que ese axioma se cumpliese.

De esta forma resultó más claro el sentido de la notación decimal con infinitas cifras decimales, como símbolo para expresar el supremo de un conjunto de números racionales lo que permitió hablar del significado de la notación decimal con infinitas cifras decimales, de progresiones geométricas, etc.
Observamos entonces que estas colecciones de números son en realidad sucesiones (monótonas) y pasamos a considerar sucesiones arbitrarias y la noción de convergencia de las mismas, relacionándola con el supremo de sucesiones monótonas. Aún sin hablar del límite de la sucesión, analizamos el significado de su convergencia a un número y volvimos al juego de "convencer al docente de que ese número que dicen es realmente el límite", volcando nuevamente en un cuadro la información surgida del juego. Naturalmente, en última instancia, quedaba reflejada la relación entre el ε dado y el índice n_0 a partir del cual podíamos estar seguros que se cumplía que $|a_n - a| < \varepsilon$, si $n > n_0$. A todo esto siguió una formalización de la noción de límite de una sucesión, que pudo aceptarse con bastante naturalidad. Se destacó también la posibilidad de encontrar sucesiones constantes o que tuviesen infinitos términos coincidentes con el valor al que convergía la sucesión.
La idea era la de acostumbrarse a entender al número real como proceso o como objeto, según fuese necesario, pudiendo pasar constantemente y en forma natural de una interpretación a la otra (las dos caras de la misma moneda según Sfard, 1991).
Aunque los resultados de la primera evaluación parcial, que incluía estos temas, arrojaron mejores calificaciones que en años anteriores, es claro que no podemos atribuirlos completamente a la manera de presentar el contenido y es nuestro propósito revisar este trabajo y ajustar la propuesta, aunque sí parece claro que es más constructivo detenerse en estos aspectos conceptuales, en lugar de poner el énfasis en las técnicas algebraicas del cálculo de límites de sucesiones numéricas, aunque es este un aspecto que tampoco debe descuidarse.

A MODO DE CIERRE

Las dificultades detectadas como los aportes de los alumnos nos llevan a suponer que sería necesario un cambio programático en la propuesta curricular de la materia Análisis Matemático debido a que sus contenidos parten de considerar que los alumnos tienen saberes previos referidos a números y funciones y a partir de los resultados de los diagnósticos surgiría la necesidad de modificar y/o adecuar las expectativas iniciales en el desarrollo de la asignatura.
En el marco de la Ingeniería Didáctica, la fase del Análisis Preliminar nos permitió construir los fundamentos teóricos y prácticos que orientaron la elaboración de la ingeniería a utilizar en el aula y su puesta en práctica. Actualmente estamos poniendo en práctica un ajuste de la ingeniería desarrollada a partir de la confrontación del análisis a priori y el análisis a posteriori.

BIBLIOGRAFÍA

ARTIGUE, M. 1991. Analysis. En Tall, D. (ed): *Advanced Mathematical Thinking.* (Kluwer Academic Publishers, The Netherlands).
ARTIGUE, M; DOUADY, R; et al. 1995. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. (Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá).
ARTIGUE, M. 1998. L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. Recherches. *Didactique des Mathématiques*, Vol 18.2. (Grenoble: La Penseé Sauvage).

AZCARATE, C.; CASADEVALL, M.; CASELLAS, E.; BOSCH, D. 1996. *Cálculo Diferencial e Integral*. Colección: Educación Matemática en Secundaria. (Editorial Síntesis, España).

AZCÁRATE, C. ; DEULOFEU, J. 1990. *Funciones y gráficas.* Colección: Matemáticas : Cultura y Aprendizaje. (Editorial Síntesis, España).

BERGÉ, A.; SESSA, C. 2003. Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *RELIME,* 6, 163-197.

BROUSSEAU, G. 1997. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. (Kluwer Academic Publishers, The Netherlands).

DUBINSKY, E.; HAREL, G. 1992. The Nature of the Process Conception of Function. En: Harel and Ed Dubinsky (ed), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes Volume 25. Mathematical Association of America.

FARFÁN MÁRQUEZ, R. M. 1996. Matemática Educativa e Ingeniería Didáctica. Documento de ICME 8. España.

GUALA, G; GÜICHAL, E; MALET, A; OSCHEROV, V. 2005: La enseñanza del Cálculo en la Educación Polimodal y en la Universidad. Continuidades, rupturas y obstáculos. Memorias del VII Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy. En internet: www.edumat.com.ar

PERKINS, D. 1997. *La escuela inteligente*. (Gedisa, Barcelona).

GÜICHAL, E.; GUALA, G.; MALET, A.; OSCHEROV , V. 2005: Reporte de Investigación: *La Enseñanza del Cálculo en la Educación Polimodal y en la Universidad. Diagnóstico sobre números reales.* XIX Reunión de Matemática Educativa (RELME 19). Uruguay.

SFARD, A. 1991: On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the same Coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.

STEWART, J. 1999. *Cálculo, conceptos y contextos*. (Int. Thomson Editores, Colombia).