Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
ISSN: 1665-2436
relime@clame.org.mx
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Organismo Internacional

Llanos, Viviana Carolina; Otero, María Rita

LA INCIDENCIA DE LAS FUNCIONES DIDÁCTICAS TOPOGÉNESIS, MESOGÉNESIS Y CRONOGÉNESIS EN UN RECORRIDO DE ESTUDIO Y DE INVESTIGACIÓN:EL CASO DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 18, núm. 2, 2015, pp. 245-275
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, Organismo Internacional

Viviana Carolina Llanos, María Rita Otero

LA INCIDENCIA DE LAS FUNCIONES DIDÁCTICAS TOPOGÉNESIS, MESOGÉNESIS Y CRONOGÉNESIS EN UN RECORRIDO DE ESTUDIO Y DE INVESTIGACIÓN: EL CASO DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

The impact of the didactic functions topogénesis, mesogénesis and cronogénesis in a research and study paths (rsp): the case of the polynomial functions of the second degree

RESUMEN

Se presentan algunos resultados de una investigación que propone estudiar matemática en la Escuela Secundaria en Argentina por medio de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI). El REI permite reconstruir distintas Organizaciones Matemáticas (OM) del programa de estudio de la secundaria; pero en este trabajo sólo describimos una primera parte, correspondiente a las funciones polinómicas de segundo grado. Las implementaciones se realizaron en cursos de 4to Año de la Secundaria, y en total participaron 163 estudiantes. Se describen aquí los resultados obtenidos en las distintas implementaciones, a partir de las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis. Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard.

PALABRAS CLAVE:

- *Recorridos de Estudio y de Investigación (REI)*
- *Funciones polinómicas de segundo grado*
- *Topogénesis*
- *Mesogénesis*
- *Cronogénesis*

ABSTRACT

We present some research results on a proposal of study mathematics, on secondary school in Argentina, by Research and Study Paths (RSP). The RSP allows us reconstruct the different Mathematical Organizations (MO) of secondary syllabus. In this paper we describe just the first part of the RSP, the one related to second grade polynomial functions. The didactic experiences were carried out with 163 students, on their 4th year course. The results on the different experiences are described using the didactic functions of topogenesis, mesogenesis and chronogenesis, based on Yves Chevallard's Anthropologic Theory of Didactic (ATD).

KEY WORDS:

- *Research and Study Paths (RSP)*
- *Second grade Polynomial Functions*
- *Topogenesis*
- *Mesogeneis*
- *Chronogenesis*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2015) *18* (2): 245-275.
Recepción: Marzo 28, 2012 / Aceptación: Julio 27, 2014. DOI: 10.12802/relime.13.1824

RESUMO

Apresentam-se alguns resultados de uma investigação que propõe estudar matemática na Escola Secundária em Argentina por médio de um Percurso de Estudo e de Investigação (PEI). O PEI permite reconstruir diferentes Organizações Matemáticas (OM) do programa de estudo da secundária; mas neste trabalho só descrevemos uma primeira parte, correspondente às funções polinomiais de segundo grau. As implementações realizaram-se em cursos de 4[to] Ano da Secundária, e ao todo participaram 163 alunos. Neste artigo escrevem-se os resultados obtidos nas diferentes implementações, a partir das funções didácticas topogenèse, mésogenèse e chronogenèse. Adopta-se como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didáctico (TAD) de Yves Chevallard.

PALAVRAS CHAVE:

- *Percurso de Estudo e de Investigação (PEI)*
- *Funções polinomiais de segundo grau*
- *Topogénesis*
- *Mesogénesis*
- *Cronogénesis*

RÉSUMÉ

Ce travail présente quelques résultats d'une recherche qui vise à étudier les mathématiques au moyen d'un Parcours d'Étude et de Recherche (PER), dans l'École Secondaire en Argentine. Le PER a permis de reconstruire les différentes Organisations Mathématiques (OM) du programme d'étude de l'école secondaire; mais dans cet article nous décrivons seulement la première partie, correspondant aux fonctions polynômes du second degré. Les implémentations ont été développées dans les cours de 4[éme] année de collège, et au total ont participé 163 étudiants. Les résultats des différents implémentations, des fonctions d'enseignement de topogenèse, mésogenèse et chronogenèse on été ici décrits. On a adopté la Théorie Anthropologique du Didactique d'Yves Chevallard (TAD) comme référentiel théorique.

MOTS CLÉS:

- *Parcours d'Étude et de Recherche (PER)*
- *Fonctions polynomiales du deuxième degré*
- *Topogenèses*
- *Mésogenèses*
- *Chronogenèses*

1. Introducción

La enseñanza de la matemática en la escuela secundaria presenta problemas complejos e ineludibles, que conllevan altos niveles de frustración para los estudiantes y el profesor. El modelo didáctico dominante es mecanicista o aplicacionista; es decir, el profesor explica, presenta el saber como si se tratara de una obra museográfica, que a lo sumo los estudiantes pueden visitar. Este fenómeno es denominado, metafóricamente por Chevallard (2004), *monumentalización del saber*. En una enseñanza monumental, la actividad del alumno se ve afectada por las decisiones e instrumentos que el profesor proporciona y comunica. En consecuencia, su *topos* se reduce a lo que el profesor decide comunicar; y a lo sumo, el alumno sólo puede reproducir la obra que le es presentada. Otra consecuencia gravísima de la *monumentalización*, es la instalación de un proceso sistemático y muy arraigado de eliminación de las preguntas, que son sustituidas por la enseñanza de respuestas. Las obras expuestas por el profesor se corresponden con respuestas a preguntas "ocultas", sin que se reconozca ninguna necesidad de remitir a su origen, a su utilidad, a su razón de ser, a su porqué o para qué; lo que permite afirmar que el modelo teoricista dominante en la enseñanza de la matemática define al saber matemático como acabado, sin sentido (Gascón, 2001). La desaparición de las preguntas y de una actividad matemática escolar genuina, es una de las dificultades más difíciles de revertir en la enseñanza de la matemática actual, y es a este problema al que se busca enfrentar.

Desde diferentes perspectivas, muchas investigaciones se han ocupado de analizar y describir obstáculos en la enseñanza de la matemática y también, de proponer modificaciones sustanciales con relación a dichos procesos en todos los niveles. En el nivel universitario, los trabajos de Aparicio y Cantoral (2006), Corica y Otero (2009, 2012) y Guzmán (1998) y en el nivel medio Bagni (2004), Fabra y Deulofeu (2000), Ferrari y Farfán (2008), Fernandez y Llinaris (2012), Ortega y Pecharromán (2010), Otero y Banks Leite (2006) y Sánchez (2013) entre otros, manifiestan la necesidad de un cambio radical con relación a la pedagogía dominante, sea por el análisis de las prácticas habituales desarrolladas en una institución, por las características sobre la forma en que se construyen y desarrollan los conocimientos, o por medio de modelos pedagógicos que permitan modificar la enseñanza habitual.

Situados en el referencial de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2013), nuestro problema didáctico también está dirigido a introducir cambios, sobre todo, en la forma de hacer matemática. Se requiere de una modificación sustancial del modelo pedagógico imperante, que sustituya la *pedagogía monumentalista* y su eliminación sistemática de las preguntas, por la pedagogía *de la investigación* y *del cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2004, 2007, 2013). Los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) (Chevallard, 2009) son el dispositivo didáctico que permite desarrollar dicha pedagogía en el aula. Una pregunta esencial es cómo introducir los REI en el Nivel Secundario, debido a la magnitud de las modificaciones que se requieren con relación a: la distribución de las responsabilidades entre los agentes de una clase (*topogénesis*); el "dominio" del tiempo reloj requerido, respecto del establecido en las instituciones (*cronogénesis*); así como también, cómo se constituye y gestiona el medio didáctico (*mesogénesis*); aspectos que no pueden entenderse unos sin los otros, y que determinan los alcances del recorrido en cada ejecución.

En el marco de la TAD, algunas investigaciones han desarrollado REI en distintos niveles. En la universidad, Barquero, Bosch y Gascón (2011), Ladage y Chevallard (2011) y Serrano, Bosch y Gascón (2007) desarrollan y analizan las características de los REI en clases paralelas a las estrictamente académicas. Fonseca y Casas (2009) proponen analizar los problemas de la transición escuela secundaria – universidad a partir de un REI que comienza en la escuela secundaria y que continúa en el año próximo en la universidad. Las investigaciones de Fonseca, Pereira y Casas (2011), García, Bosch, Gascón y Ruiz (2005) se desarrollan en el nivel medio; y en todos los casos los REI corresponden a actividades extra curriculares, ejecutadas en talleres especiales. En consecuencia, la inserción de los REI en los cursos usuales de Matemática en cualquier nivel, está poco desarrollada. Particularmente en Argentina se ha desarrollado un REI bi-disciplinar (Parra, Otero y Fanaro, 2013) con estudiantes de la escuela secundaria; y también a partir de la investigación que aquí presentamos, se han desarrollado investigaciones de corte longitudinal (Llanos y Otero, 2012, 2013a, 2013c) con estudiantes entre 14 y 17 años.

En este trabajo se describen y analizan las características de la primera parte del recorrido que se desarrolla en 4to Año de la Escuela Secundaria en Argentina; cuyas preguntas derivadas "cubren" el estudio de la OM de las funciones polinómicas de segundo grado. Utilizando las funciones didácticas *topogénesis*, *cronogénesis* y *mesogénesis*, se analizan los resultados correspondientes a las primeras tres situaciones derivadas del REI.

A continuación, se sintetiza el marco teórico y se especifican las cuestiones que se responderán a partir de la base empírica obtenida en las implementaciones realizadas.

2. Marco teórico: algunas nociones centrales de la TAD

Se adopta el referencial teórico desarrollado por Yves Chevallard en la TAD (Chevallard, 1999), específicamente los constructos *Recorridos de Estudio y de Investigación* (REI) (Chevallard, 2004, 2007, 2009, 2013) y las funciones didácticas o de producción *mesogénesis*, *cronogénesis* y *topogénesis* (Chevallard, 1985, 2009).

Con el objetivo de hacer efectivo un cambio de paradigma con relación a la enseñanza *monumental* y a la consecuente *pérdida de sentido de la matemática escolar*; Chevallard (2004) propone los REI. Éstos se desarrollan a partir de una pregunta generatriz Q_0 y de las respectivas preguntas derivadas de dicha cuestión, las Q_i. Los REI permiten redefinir los programas de estudio a partir de un conjunto de preguntas, en lugar de una reproducción de respuestas, como ocurre habitualmente en la enseñanza. Pero las modificaciones requeridas son de tal envergadura, que acaban afectando al proceso de estudio, a la ecología y en síntesis a la supervivencia de los REI (Gascón, 2011). Estas modificaciones se plasman en los procesos de *topogénesis*, *mesogénesis* y *cronogénesis*; indispensables para el análisis didáctico propuesto por la TAD (Chevallard, 2011).

2.1. *Los REI*

Los REI son el producto del desarrollo de la *pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo* en el aula. Un REI comienza con una pregunta generatriz Q_0 como punto de partida de todo el proceso de estudio. El estudio de Q_0 se concreta en un recorrido "general" que integra varias preguntas derivadas Q_i. Cada Q_i a su vez da lugar a numerosas preguntas particulares ligadas a ella. La distinción entre una "pregunta finalizada" Q y la "pregunta generatriz" Q_0, como lo propone Chevallard (2009), resulta muy importante para entender el alcance de un recorrido. Q_0 como punto de partida en un REI, debe permitir "cubrir" un programa de estudio a partir de la reconstrucción de las distintas OM que lo conforman; de manera articulada y con sentido pues cada OM es el resultado de reconstruir una respuesta a las diferentes Q_i; y por lo tanto siempre se recurre a Q_0.

Q_0 entonces, da lugar al estudio de las preguntas derivadas, y estas últimas a la formación y el funcionamiento del sistema didáctico $S(X;Y;Qi)\, 1 \leq i \leq n$. Chevallard (2013) describe las características de una enseñanza por REI, a partir de lo que él denomina *esquema herbatiano desarrollado*:

$$[S(X;Y;Q) \rightarrow \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{n+1}, \ldots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

De este esquema se puede interpretar que:

- el REI debe organizarse en torno a una pregunta generatriz (Q_0),
- el sistema didáctico $S(X;Y;Q)$ está compuesto por un grupo de estudiantes X; las ayudas al estudio dadas por un grupo de profesores Y o un único profesor $\{y\}$, y el ♥ de todo el proceso, dado por Q.

– este sistema didáctico permite y requiere de la constitución de un medio didáctico $M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge},...., R_n^{\lozenge}, Q_{n+1},....., Q_m, O_{n+1},...., O_m\}$ que contiene las preguntas generadas a partir de Q, las respuestas pre-construidas, aceptadas por la cultura escolar, notadas como $R_i^{\lozenge}$ para $i = 1,\ldots, n$. Pueden incluirse en la categoría de respuestas "hechas" –un libro, la Web, el curso de un profesor, etc.-.También pertenecen a M, entidades O_j, con $j = n+1,\ldots.,m$; que son obras –teorías, montajes experimentales, praxeologías, etc.– consideradas potencialmente útiles para elaborar las respuestas $R^{\lozenge}$ obteniendo de allí, algo utilizable para generar $R^{\heartsuit}$.

Es en el *medio* didáctico donde se elaboran las Q_i, las respectivas R_i y como consecuencia $R^{\heartsuit}$; como resultado del proceso de estudio. La generación del *medio* requiere de modificaciones importantes con relación a la pedagogía dominante, que afectan al proceso de estudio y a la "vida" del REI:

> *L´étude d´une question Q se concrétise en un PER dont la durée peut varier. Plus largement, la description et l´analyse des PER (notamment du triple point de vue de la topogenèse, de la mésogenèse et de la chronogenèse) est un problème cardinal de la TAD* (Chevallard, 2011, p. 29)

El análisis del recorrido que se propone en esta investigación, puede realizarse por lo tanto a partir de dichas funciones, y las mismas se describen a continuación.

2.2. *Mesogénesis, cronogénesis y topogénesis*

Los REI demandan un cambio pedagógico sustancial con implicaciones fuertes en la *cronogénesis,* la *topogénesis* y la *mesogénesis* (Chevallard, 1985, 2009), denominadas por Chevallard «funciones didácticas» o «de producción».

– La *mesogénesis* es el proceso de construcción del medio didáctico M, que se elabora para generar tanto respuestas internas (podrían ser éstas R_x producidas por un alumno x, o por el profesor R_y, sólo que estás últimas deben ser sometidas a los mismos cuestionamientos que las de R_x) o externas, cualquier $R_i^{\lozenge}$. Todas las respuestas "alimentan" el *medio* M y aportan respuestas parciales a Q. En un REI el medio no está determinado de antemano, es "construido por la clase". Son varias las obras que pueden ser llamadas a construir el medio, y no pueden ser excluidas como podría ocurrir en la *enseñanza tradicional.* El *medio* debe ofrecer herramientas idóneas para construir y justificar cada respuesta parcial y la $R^{\heartsuit}$ que se construye como resultado del proceso.

– La *topogénesis* es la función que vincula cómo se ocupan los espacios del grupo de alumnos X y el profesor $\{y\}$. Las modificaciones en la *topogénesis* van a la par de los cambios en la *mesogénesis* dado que los cambios de roles afectan también a los resultados que puedan obtenerse en el *medio didáctico*; teniendo en cuenta que las modificaciones en el *medio* se dan al interior de la clase $[X; y]$ y no sólo son responsabilidad de y. El *topos del alumno* y el *topos del profesor* hacen referencia a la posición de los alumnos y el profesor en relación con las OM construidas o en proceso de construcción durante el proceso de estudio en el *medio.*

– La *cronogénesis* es una función que regula los tiempos didácticos para los distintos componentes del sistema. Esta componente relativa al tiempo real requerido para efectuar el estudio de una pregunta, es lo que permite diferenciar a los REI de los demás dispositivos didácticos. La constitución y el "trabajo" en el medio M en una enseñanza por REI, afectan al tiempo didáctico produciendo una dilatación del mismo; una extensión del tiempo reloj requerido. Esta "extensión del tiempo reloj" producido por la inserción de un REI, respecto de los episodios didácticos usuales en la escuela, afectan a la *mesogénesis* y como consecuencia también a la *topogénesis.* Aquí es necesario "cuidar" todo el trabajo en M, por el impulso de "estimular el estudio" de manera artificial para que el "tiempo escolar" recomendado sea acorde al producido por el REI. Si esta "exigencia" no es considerada, puede que el *sistema didáctico* efectivo en una pedagogía de REI, compuesto por $S(X;Y;Q_i)$, se transforme en un *sistema didáctico tradicional* $S(X;Y;O_j)$, es decir, es necesario evitar la reducción del estudio de las Q_i por el de obras finalizadas O_j.

Las modificaciones necesarias para introducir la *pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo* en una institución dada, producen inevitablemente, modificaciones que acaban afectando a los niveles *topogenético, mesogenético* y *cronogenético.* Dichas modificaciones van a la par y se afectan mutuamente.

Desde el referencial teórico descripto se formulan en este trabajo las preguntas de investigación: ¿Qué características tiene la OM efectivamente reconstruida, con relación a la actividad matemática que se lleva a cabo? ¿Qué diferencias pueden identificarse en las distintas implementaciones del REI?

3. Metodología

Se trata de un estudio cualitativo, de corte exploratorio y carácter etnográfico. Se propone introducir una nueva pedagogía basada en una enseñanza por REI en un contexto experimentalmente controlado. La investigación se desarrolla en cursos habituales de la escuela secundaria en Argentina. El recorrido propuesto permite estudiar varias OM del programa de estudio de la secundaria, pero en este trabajo sólo se describen los resultados obtenidos en la primera parte, como consecuencia de introducir el REI.

Los 163 estudiantes que participaron de la parte de la investigación que se desarrollan en este trabajo tienen entre 14 y 15 años. El REI se introduce en dos cursos en paralelo por cada año durante tres años consecutivos; donde el investigador es el profesor de los cursos. Cada cohorte corresponde a 4to Año de la escuela secundaria. En total se realizaron seis implementaciones, y los datos obtenidos permiten describir, entre otras cosas, las diferencias significativas entre un año y el siguiente; a partir de las decisiones consideradas en el nivel de las funciones didácticas *topogénesis*, *cronogénesis* y *mesogénesis* que son el objeto de análisis de este trabajo.

Durante cada implementación el profesor tiene carácter de observador participante y se realiza también observación no participante a partir de la colaboración de colegas del equipo de investigación. Estas tareas permiten generar registros de clase, a partir de la producción de notas de campo elaboradas antes y después de cada encuentro por el profesor y la información proporcionada por los demás investigadores. Se toma también un audio general de cada curso durante todo el período de ejecución del REI.

Para un adecuado funcionamiento del recorrido, el profesor acerca cada clase el problema que es desconocido para los estudiantes y "retira" las producciones escritas de todos los alumnos al finalizar cada encuentro. Mediante la técnica de escaneo se registra lo producido por cada alumno en cada encuentro, y se devuelven los trabajos a la clase siguiente. Esto permite obtener todos los protocolos escritos de los alumnos durante la implementación, en las seis ejecuciones realizadas. A partir de la transcripción de los registros de audio, las notas de campo generadas antes y después de cada encuentro y las producciones escritas de los estudiantes; se analizan los resultados obtenidos, producto de introducir el REI.

Los resultados que se describen corresponden a una triangulación de la información generada. Las notas de campo, y los registros de audio permitieron interpretar resultados que no pueden extraerse de los protocolos escritos de los estudiantes, como ocurre por ejemplo con los momentos de puestas en común -que de ellas los alumnos sólo registran los resultados que se consensúan-; y también las notas de campo principalmente para recuperar las decisiones que el profesor-investigador fue tomando al interior del recorrido a partir de las respuestas que fueron aportando los estudiantes oportunamente y las discusiones colectivas que se generaron.

Para analizar los protocolos de los 163 estudiantes, estos se segmentaron en episodios correspondientes a cada tarea y además se selecciona un alumno, el más representativo de cada grupo de estudio, por cada implementación, organizados los estudiantes en equipos de 4 personas durante todo el recorrido. Entre todas las implementaciones se generaron 41 grupos de estudio y el análisis se basó al inicio en los estudiantes prototípicos de cada grupo. La selección de estos alumnos sólo corresponde a una organización inicial que permite interpretar lo que cada grupo pudo producir; y después se analizan los demás casos.

Los cambios en la Organización Didáctica que determinan las características de la OM efectivamente reconstruida, se describen mediante los niveles *mesogenético*, *cronogenético* y *topogenético* por cada situación y en cada "año" de implementación.

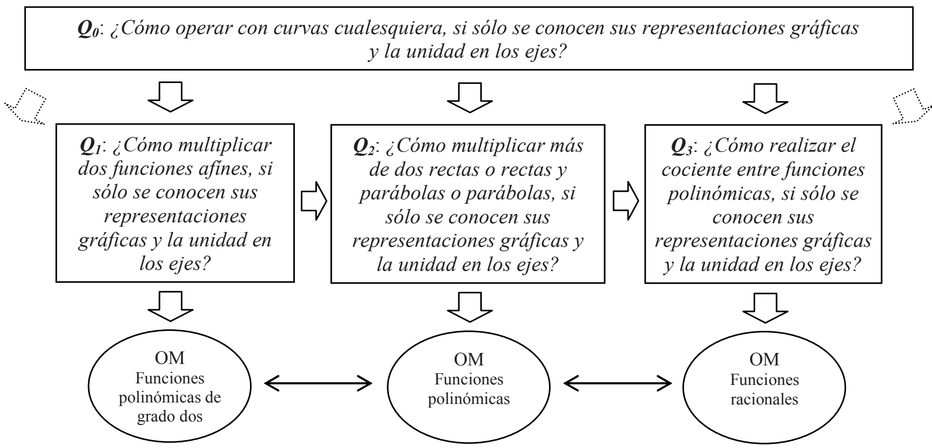
Se analizan los resultados obtenidos en la primer parte del REI que permite reconstruir la OM de las funciones polinómicas de segundo grado. El análisis de las funciones didácticas por cada situación permite describir, analizar y evaluar la gestión del REI y en particular, en este artículo, de la primera parte desarrollada en los diferentes años de implementación. Como indica Chevallard (2011) analizar y describir el REI, implica identificar las decisiones consideradas al interior del mismo con relación a las funciones didácticas o de producción e identificar como consecuencia los alcances en la actividad desarrollada con relación a la OM de las funciones polinómicas de segundo grado.

4. El REI

El REI propuesto parte de la pregunta generatriz Q_0: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si sólo se conocen sus representaciones gráficas y la unidad en los ejes?* (Llanos y Otero, 2013a, 2013b). Se presenta un recorrido que permite una cobertura casi completa de las OM del programa de estudio de los últimos tres años de la escuela secundaria en Argentina; de acuerdo con el análisis del Modelo Praxeológico de Referencia establecido por la investigación. Las OM que pueden reconstruirse son relativas a las curvas que se elijan y las operaciones entre las mismas. Por ejemplo, si se suman y restan rectas la pregunta Q_i: *¿Cómo sumar y restar curvas si solamente se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* permite estudiar la OM de las funciones polinómicas de primer grado; y también a partir de la resta de dos rectas paralelas se ingresa en la OM de las funciones constantes. La pregunta, Q_{ii}: *¿Cómo multiplicar curvas, cuando solamente se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* origina el estudio de la OM de las funciones polinómicas de segundo grado cuando la multiplicación se reduce a dos rectas; y en los casos donde se multiplican más de dos rectas, o rectas y parábolas, o parábolas permite estudiar la OM de las funciones polinómicas. La OM de las funciones racionales pueden originarse en Q_{iii}: *¿Cómo realizar el cociente entre funciones polinómicas cuando sólo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* pregunta que origina como consecuencia el estudio de la OM de las asíntotas y la OM del límite. Para el caso particular del cociente entre dos funciones afín es posible reconstruir la OM de las funciones homográficas. Si además se considera el caso de las operaciones con raíz y potencia, es posible estudiar la OM de las funciones potenciales y las radicales a partir de Q_{iv}: *¿Cómo obtener la potencia o raíz de una curva cuando solamente se conoce la representación gráfica y la unidad en los ejes?* Algunas de las respuestas posibles a Q_0 fueron inicialmente propuestas por los estudiantes, principalmente para el caso de operaciones con rectas (Llanos et Otero, 2013a).

Además de las OM relativas a cada tipo de función, pueden agregarse otras que incluyen por ejemplo a las ecuaciones respectivas, a las operaciones algebraicas entre las funciones y a un tratamiento que podría comprender un nivel de algebrización que distingue variables de parámetros. También puede reencontrase la OM de las funciones trascendentes; que si bien no se constituye como resultado de efectuar operaciones con curvas; en el marco del REI las mismas pueden ser objeto de construcción a partir de una adaptación de las técnicas geométricas generadas para las algebraicas, como lo propone la investigación de Ferrari y Farfán (2008).

De los recorridos mencionados como emergentes del REI, se ha desarrollado la investigación en tres partes determinadas por el estudio de las preguntas derivadas relativas a la multiplicación de dos rectas, la multiplicación de más de dos rectas, rectas y parábolas o entre parábolas; y también el caso del cociente entre funciones polinómicas (Gazzola, Llanos y Otero, 2013; Llanos y Otero, 2013b; Otero, Llanos y Gazzola, 2012). Las preguntas y las OM del programa “cubiertas” por el REI en su implementación pueden sintetizarse en el Esquema 1, partiendo siempre del “germen” de la investigación que en este caso ha sido la pregunta generatriz Q_0.



Esquema 1: Posibles recorridos de investigación, desarrollados en el marco del REI propuesto. Esquema tomado de Llanos y Otero (2012), con modificaciones.

El problema de las operaciones con curvas se desencadena a partir de una adaptación de una ingeniería propuesta por Douady (1999) para estudiar los signos de las funciones polinómicas. En nuestro caso, el recorrido que se propone permite ir más lejos. Desde las primeras situaciones se obtiene la construcción de la curva que resulta de realizar operaciones con otras del mismo tipo de grado menor, y el análisis de los signos es una información más entre las características de la gráfica que se construye. Además el REI permite recuperar las características construidas en un marco de resolución en otro, pues se avanza hacia la multiplicación analítica de las curvas (Douady, 1984, 1986). Entre los posibles recorridos, se presenta una descripción y análisis de la primer parte del REI, que se genera a partir del problema de la multiplicación de dos rectas. Dicho análisis se realiza por medio de las funciones didácticas o de producción: *mesogénesis*, *topogénesis* y *cronogénesis* en los diferentes años de implementación.

El planteo *mesogenético* que se realizó inicialmente como consecuencia de introducir el REI en el aula permitió justificar por qué se comienza por el recorrido que desencadena la pregunta Q_1: *¿Cómo multiplicar dos funciones afín, si sólo se conocen sus representaciones gráficas y la unidad en los ejes?* La razón es que ésta es la inicialización más disponible para los estudiantes de 4to Año de la Secundaria, que están muy familiarizados con las rectas (Llanos et Otero, 2013a) y entre las operaciones, la multiplicación permite ingresar en el estudio de la OM de las funciones polinómicas de segundo grado central en el programa de estudio de ese año escolar.

El análisis de las diferentes preguntas que puedan derivar de Q_1, que de cierto modo “guían” el estudio, da lugar a otras preguntas que pueden desprenderse de la misma y que de cierto modo determinan las características de la curva que se reconstruyen a partir de la multiplicación de dos rectas:

Q_1: *¿Cómo multiplicar dos funciones afines, si sólo se conocen sus representaciones gráficas y la unidad en los ejes?*

$Q_{1,1}$: *¿Cómo se multiplican dos rectas:*

$Q_{1,1.1}$: *con ceros distintos?*
$Q_{1,1.2}$: *con ceros iguales?*
$Q_{1,1.3}$: *con pendientes de igual signo?*
$Q_{1,1.4}$: *con pendientes opuestas?*
$Q_{1,1.5}$: *paralelas?*
$Q_{1,1.6}$: *coincidentes?*

$Q_{1,2.1}$: *¿Qué produce la multiplicación geométrica de dos rectas?*
$Q_{1,2.2}$: *¿Qué produce la multiplicación algebraica de dos rectas?*

$Q_{1,3}$: *¿Qué características tiene la función que se obtiene de multiplicar dos rectas:*

$Q_{1,3.1}$: *desde un punto de vista geométrico?*
$Q_{1,3.2}$: *desde un punto de vista algebraico?*
$Q_{1,3.3}$: *desde un punto de vista funcional?*

$Q_{1,4}$: *¿Qué características tiene la representación gráfica que resulta de multiplicar dos rectas:*

$Q_{1,4.1}$: *geométricamente?*
$Q_{1,4.2}$: *algebraicamente?*

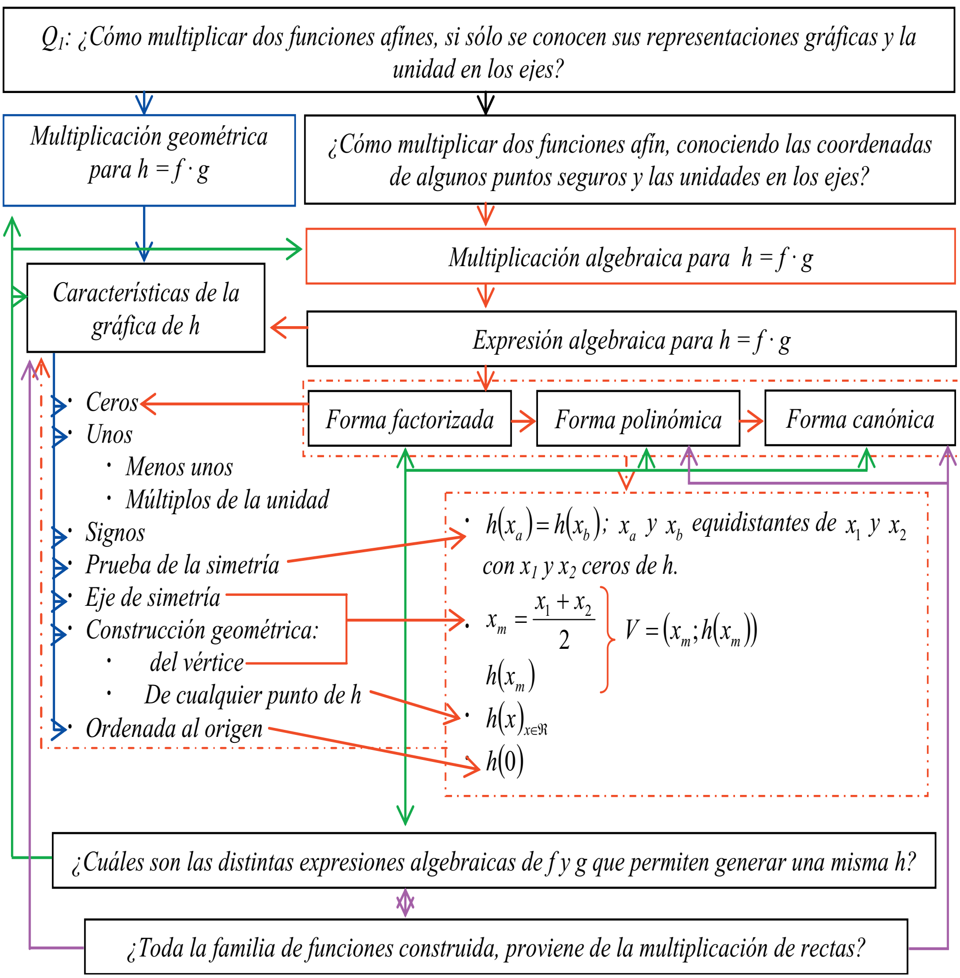
$Q_{1,5}$: *¿Pueden distintos pares de rectas generar una misma función?*

$Q_{1,6}$: *¿Puede una función de la familia construida no provenir de la multiplicación de rectas?*

$Q_{1,i}$: . . .

Entre las preguntas mencionadas antes, sólo algunas fueron desarrolladas en el REI. El esquema 2 permite interpretar cómo se efectúa el recorrido que parte de la multiplicación de las rectas, cómo se retoman las cuestiones y los conceptos construidos, al mismo tiempo que permite interpretar cómo se relacionan los conceptos que se van construyendo en el trayecto por la cuestión Q_1 y las que de ésta se derivan. Todo el recorrido es guiado por un conjunto de actividades que originan la *razón de ser* de todo el proceso.

Para la investigación, es muy importante analizar los alcances y limitaciones de las actividades propuestas, y las modificaciones que se van dando como consecuencia de abordar el problema de la multiplicación de las rectas, cuando solamente se conoce la representación gráfica de las mismas y la unidad en los ejes. Estos cambios son descritos por medio de las funciones didácticas *mesogénesis*, *topogénesis* y *cronogénesis*; por cada situación, en los distintos años de implementación.



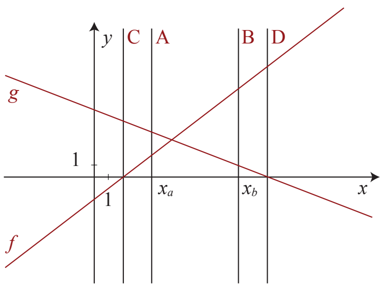
Esquema 2: Descripción del recorrido generado a partir de Q_1. Esquema tomado de Llanos y Otero (2012) con modificaciones.

4.1. *La OM de las funciones polinómicas de segundo grado*

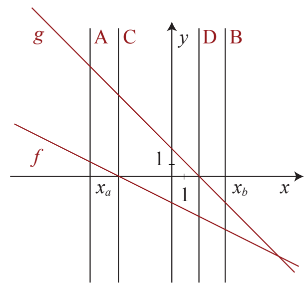
El recorrido generado por Q_1, parte de la necesidad de multiplicar dos rectas. Las tres primeras situaciones son una variante del mismo problema, pues lo que cambian son las rectas que se multiplican. Las situaciones que inicialmente se proponen son:

Las funciones f y g están dadas por los gráficos de las Figuras. Todas las rectas A//B//C// D, son perpendiculares al eje x. La función $h = f \cdot g$.

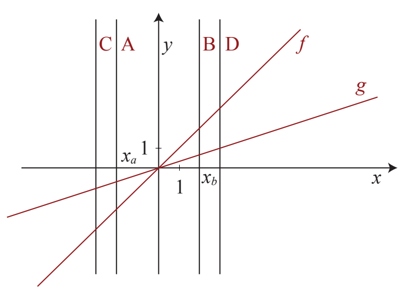
Situación 1



Situación 2



Situación 3



Gráficas correspondientes a las a las funciones *f* y *g* de las situaciones 1, 2 y 3.

(a) *¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para h? ¿Qué características de la gráfica de h podrías justificar?*

(b) *Para todo* x_a *y* x_b *equidistantes de los ceros de cada función, los segmentos* $\overline{AC}=\overline{BD}$ *¿Es verdad que* $h(x_a) = h(x_b)$*? ¿Podrías justificar?*

(c) *¿Qué triángulos tendrías que construir para calcular la multiplicación entre f y g en el eje de simetría, utilizando como lado de uno de los triángulos, la unidad?*

Se busca obtener una gráfica aproximada para *h*, en principio, a partir de la identificación de los puntos notables y los signos de *h* (C^+ y C^-). Se destaca el proceso según el cual se prueba la simetría de la curva. Se desarrolla también, una técnica que permite calcular geométricamente el vértice de una parábola y aumentar la cantidad de puntos de la curva, construyendo triángulos semejantes debidamente seleccionados, utilizando como información la unidad. Esta técnica está basada en la tecnología del Teorema de Tales y la proporcionalidad de segmentos.

Partiendo de la multiplicación geométrica de las rectas, es posible obtener una gráfica aproximada para *h*. Para ello es necesario:

- Identificar los signos de *h* a partir del análisis de los signos de *f* y *g*.
- Identificar los puntos notables de *h*: ceros (que coinciden con los de las rectas), unos (puntos donde rectas admiten la unidad como ordenada y *h* como consecuencia la ordenada de la otra recta), menos uno (un razonamiento análogo permite identificar otros puntos donde las rectas admiten el valor menos uno en su ordenada), múltiplos de la unidad.
- Justificar la simetría de la curva: identificar el eje de simetría (a partir de los triángulos semejantes y la evocación al Teorema de Tales), identificar los puntos simétricos.
- Construir el vértice de *h*, a partir de una técnica geométrica basa en la construcción de triángulos semejantes y el Teorema de Tales.
- Construir geométricamente cualquier punto para *h*, por medio de la generalización de la técnica construida para el vértice.

Es importante aclarar que en el cuerpo del trabajo, se indican los puntos notables como "los ceros", "los unos", "los menos unos", "los dos" y cualquier múltiplo de la unidad; pues así se estableció nombrarlos en la clase. Las técnicas matemáticas que permiten justificar estos puntos notables, corresponden a la multiplicación entre ordenadas, técnicas que han sido desarrolladas y justificadas en otros trabajos (Llanos y Otero, 2013b).

Para responder a las preguntas que se introducen en la situación, los estudiantes comienzan por identificar los puntos notables (que ellos llaman *"puntos seguros"* pues se construyen a partir de la información que conocen) y analizan también los signos de *h* a partir del análisis de los signos de las rectas *f* y *g* que se multiplican. La construcción de los puntos notables y signos presentó algunas dificultades dado que las respuestas requieren de un tiempo “de maduración”, de avances y retrocesos, de una adecuada distribución de responsabilidades, de discusiones, de acuerdos. Otra cuestión crucial, aunque más compleja, es relativa a la prueba por la simetría de la curva. En todas las implementaciones ha sido posible obtener dicha prueba, pero siempre con la dificultad de los estudiantes para identificar los segmentos que permite construir los triángulos semejantes para probar la simetría de la curva por medio del Teorema de Tales. Una modificación en la *mesogénesis* y la *topogénesis* es necesaria, porque de lo contrario los alumnos no pueden avanzar en la construcción de los triángulos que esta prueba requiere.

4.2. *Situación 1*

Desde la primera situación se introduce el problema de construir una curva para *h*. Las rectas que se multiplican tienen pendientes con signos opuestos y *f* y *g* tienen ceros distintos. En este caso los alumnos responden solamente a los ítems *a* y *b*. Por una decisión situada en el nivel de la *mesogénesis*, el ítem *c*, no es abordado en la primera situación.

El problema tuvo diferentes alcances y limitaciones entre las distintas implementaciones que se realizaron. En todos los casos, el profesor aporta el problema correspondiente a la multiplicación de las rectas a partir de las preguntas derivadas de Q_1 que se indican en la situación, que son desconocidas por los estudiantes. Tampoco en un REI está todo determinado para el profesor, porque en cada curso es necesario gestionar las discusiones y resultados que se introducen al *medio* como consecuencia de encontrar una respuesta al problema.

Los alumnos, dispuestos en equipos de trabajo, asumen la responsabilidad de obtener una gráfica para *h*. Las diferencias entre los distintos años de implementación, se dan principalmente por los problemas que se introducen al *medio* en cada caso, y las decisiones que el profesor toma para abordarlos. Estas modificaciones en la *topogénesis*, *mesogénesis* y *cronogénesis* entre los distintos años de implementación, se sintetizan en la tabla i. Es importante aclarar que se indica en el análisis las modificaciones que se producen entre un año y otro. Esto permite describir lo que se incrementa en cada nivel respecto del año anterior, es decir, sólo se describen las diferencias. Esta aclaración sirve para todas las Tablas correspondientes al análisis que se colocan en este trabajo.

TABLA I

Descripción de la *cronogénesis*, *mesogénesis* y *topogénesis* de la Situación 1 por cada implementación

Situación 1			
Implementación / Niveles	*Año I* *Implementaciones* *1 y 2*	*Año II* *Implementaciones* *3 y 4*	*Año III* *Implementaciones* *5 y 6*
Nivel mesogenético	Se obtienen: – los puntos notables -ceros y unos-, – se identifican los signos, – se realiza la prueba por la simetría de la curva y se identifican los puntos simétricos, – La gráfica para *h* que se obtiene no es muy precisa.	Además: Se agregan dos puntos notables -los "menos uno" y en algunos grupos también "el dos"-. Mejora las características de la gráfica de *h*.	Además: Aumenta la cantidad de puntos seguros: los múltiplos de la unidad (los dos, tres, los menos uno, etc.) y los simétricos. Mayor precisión en la gráfica de *h*.
Nivel topogenético	Los alumnos construyen una gráfica aproximada para *h*. El profesor gestionó las discusiones y resultados parciales que se fueron dando como respuestas al problema, en la clase. También decidió avanzar cuando consideró oportuno. Esto afecta a los resultados que pueden obtener los alumnos.	Además: Los estudiantes introducen el problema de construir otros dos puntos además de los ceros y los unos y el profesor lo permite.	Además: El profesor permite que los estudiantes construyan todos los puntos que les interesa investigar y las características de la representación gráfica de *h*.
Nivel cronogenético	Es necesario extender algo más de lo previsto el tiempo para obtener una gráfica para *h*. La mayor dilatación en el tiempo reloj se produce en la prueba por la simetría. El problema del "tiempo reloj" ha sido un obstáculo.	Además: Se requiere de mayor tiempo en el problema por los puntos que deciden buscar.	Además: Mayor dilatación del tiempo reloj por la cantidad de puntos que construyen.

Como se ha descrito en la Tabla 1, las diferencias en los distintos niveles se afectan mutuamente. La permanencia de los estudiantes en el problema, que ha sido un factor determinado por las decisiones en la *cronogénesis*, es lo que determina las principales diferencias en el *medio*. En los dos últimos años, el problema introducido, al nivel de la *mesogénesis*, de construir otros puntos que los estudiantes proponen, permite obtener una representación mucho más aproximada para *h*, y también desde el inicio construir casi por completo todas las características de la representación gráfica de las funciones polinómicas de segundo grado. El punto donde *h* interseca al eje de simetría en esta situación no ha sido un problema que los estudiantes tuvieran necesidad de resolver. Sólo en algunos casos introducen un signo de pregunta en dicho punto, pero nadie coloca este problema como una característica importante a construir.

A pesar de las diferencias, en todos los casos ha sido posible obtener algunas características de la gráfica de *h* a partir de los signos y los puntos seguros, y también la prueba por la simetría de la curva. La construcción de los triángulos para probar la simetría, requirió del análisis de la proporción entre los lados y así se verifica que la curva es simétrica. Como consecuencia, los estudiantes efectúan algunas inferencias que les permite "asegurar" que el valor de *h* en el eje de simetría es único (y es "el mayor"), pero no se cuestionan por conocer precisamente cual es ese punto.

Una limitación de esta situación es relativa al problema del vértice: en ningún año de implementación, se avanza hacia la obtención del vértice de la parábola, este punto no es cuestionado por los estudiantes en esta situación. El equipo de investigación decide no abordarlo en la situación 1 por la complejidad de cada elemento construido como iniciación del recorrido, excepto que los estudiantes introduzcan este problema al *medio*, hecho que no ocurrió en ningún caso.

Los protocolos de A11 y A69, permiten describir e interpretar los alcances y limitaciones a los que se ha hecho referencia entre los distintos años de implementación. En la implementación 1, el alumno A11 consigue construir una representación gráfica para *h* aproximada; a partir de la identificación de los signos, ceros y unos. Luego, una vez realizada la prueba por la simetría de la curva, se construyen los puntos simétricos a los unos; y a partir de éstos la representación gráfica para *h*. El protocolo de este estudiante corresponde a la Figura 1.

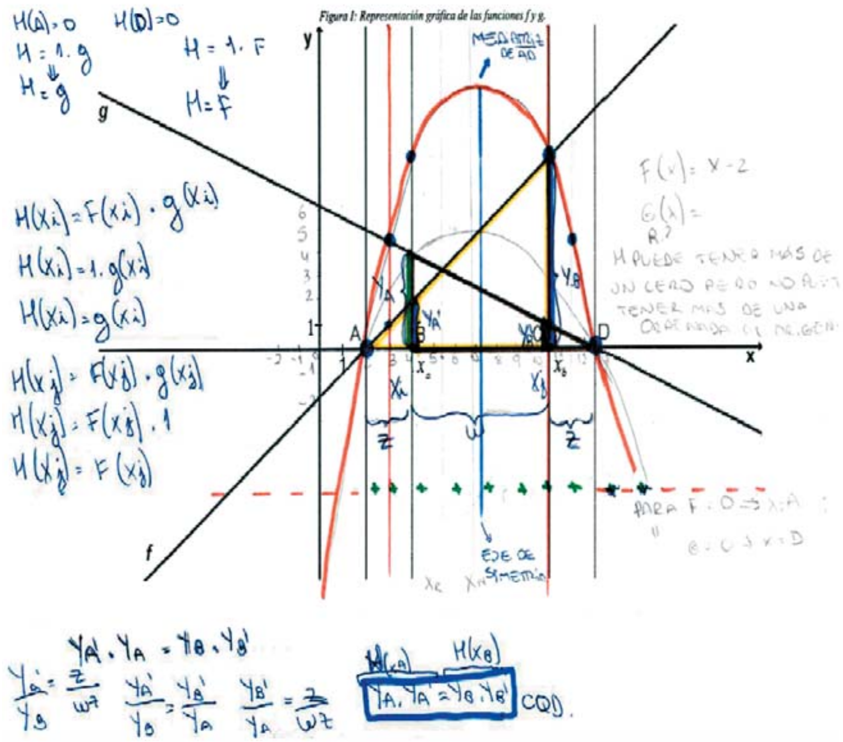


Figura 1: Protocolo correspondiente al alumno A11. Implementación 1 (Año 1)

El estudiante A69 a diferencia del anterior, agrega dos puntos más y sus respectivos simétricos. Esto le permite obtener mayor precisión sobre la "forma" de la curva *h*; sobre todo en puntos próximos al eje de simetría. En esta primera situación, en todos los casos, el vértice se obtiene por inferencia de los estudiantes.

Como puede interpretarse en la Figura 2, A69 representa gráficamente los puntos que los estudiantes nombran "los dos", y eso le permite obtener mayor precisión en la curva, respecto del otro estudiante. Hay otros que también agregan los "menos unos" que les permite obtener mayor información sobre las ramas de la curva (que ha sido una debilidad del estudiante tomado como caso), y lo único que no pueden construir con los múltiplos de la unidad es el punto correspondiente al vértice de la parábola.

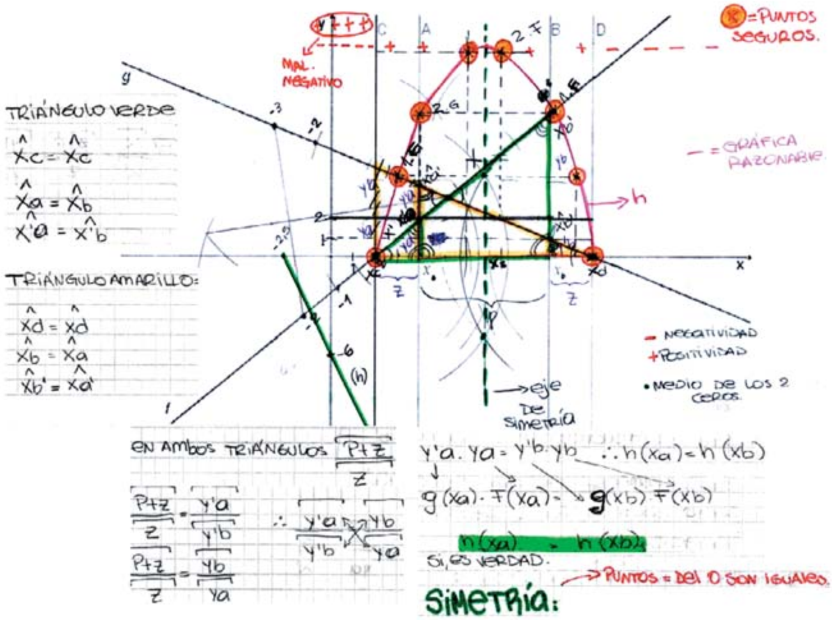


Figura 2: Protocolo correspondiente al alumno A69. Implementación 3 (Año 2)

4.3. *Situación 2*

Las rectas que se multiplican tienen pendientes con igual signo y *f* y *g* tienen ceros distintos. Respecto de la situación anterior en este caso cambian las rectas que se multiplican y la información que se proporciona a partir de la situación es la misma. El "problema *cronogenético*" relativo a la extensión del tiempo reloj comienza a ser recuperado, pues la clase ya conoce lo que se busca estudiar con el problema. Como en la situación anterior, se comienza por la identificación de los signos, y "puntos seguros". El *nivel topogenético* también se ve afectado porque el profesor ya no tiene un papel tan decisivo en la gestión de los diferentes tipos de respuestas. Los estudiantes saben qué características de la gráfica es importante construir y el profesor acciona sobre el medio para la obtención de dicha respuesta.

En esta situación se propone un cambio que afectó a las últimas dos implementaciones. La cuestión *c*) *¿Qué triángulos tendrías que construir para calcular la multiplicación entre f y g en el eje de simetría, utilizando como lado de uno de los triángulos, la unidad?* forma parte del recorrido a partir del planteo de los estudiantes que se desencadena en la tercera puesta en escena, en el segundo año de implementación:

(…) P: Bien, ¿qué otras características podemos indicar para la gráfica de *h*?
A66: Si, nos faltó marcar en el eje cuánto vale *h*.
P: Ahhhhhhhhh es verdad, ¿Por dónde pasa *h* en el eje?
A66: se juntan *f* y *g* en ese punto
P: ¿Por qué se juntan? ¿Qué quiere decir eso? Si $h = f \cdot g$, por dónde pasa *h* es la pregunta
A54: por el *x* en el eje de simetría
(…) P: Bueno, avancemos. ¿Quién encontró el punto que estamos buscando?
A53: No sabemos qué hacer
P: ¿Nadie chicos?, ¿ningún grupo hizo nada?
A62: no
P: Los demás… ¿Nadie?
(…) P: Bueno, miremos qué segmentos tenemos que multiplicar
A54: siempre *f* y *g*
P: Claro. ¿Cómo llamamos a los segmentos de *f* y *g* en el eje de simetría? Pongámosle el mismo nombre todos.
A54: *a* y *b*
P: De acuerdo. Llamemos *a* al segmento de *f* y *b* al de *g*. Además necesitamos trasladar la unidad del eje *x*, que hasta ahora no la usamos. Entonces, con *a* y la unidad construimos un triángulo. Trasladamos el segmento *b* al eje *x* y construimos otro triángulo semejante al anterior. Llamamos a esta longitud… ¿cómo la llamamos?
A75: *c*
P: Bueno, la llamamos *c*. ¿Los triángulos son semejantes?
(…) P: Entonces si son semejantes podemos plantear la proporción entre los lados: *a* es a *c* como 1 es a *b*. ¿Y ahora?
A66: y ahora *a* por *b* es igual a *c* por 1
P: muy bien
A66: y *c* es *a* por *b*
A78: ahhh ya se, *c* es *h*
P: ¿Cómo que *c* es *h*?
A78: sí, si *c* es la multiplicación de *f* y *g* que llamamos *a* y *b*
P: ¿Y entonces?
A66: ¿entonces *h* pasa por *c*?
A78: si (…)

Además del problema introducido al *medio* por los estudiantes en el segundo año; en las dos implementaciones correspondientes al último año, el profesor propone el problema de trasladar una de las rectas, para introducir el problema de la multiplicidad de los ceros, y para ello se introduce la pregunta: *Si la función g fuera móvil y se traslada hasta coincidir con f, en el punto de corte con el eje x, ¿cuál sería la curva para h y qué características tendría esta curva?* Las diferencias significativas entre los resultados obtenidos de las distintas implementaciones, son descritas por las funciones didácticas en la tabla ii.

TABLA II
Descripción de la *cronogénesis*, *mesogénesis* y *topogénesis* de la Situación 2 por cada implementación

Situación 2			
Implementación / Niveles	*Año I Implementaciones 1 y 2*	*Año II Implementaciones 3 y 4*	*Año III Implementaciones 5 y 6*
Nivel mesogenético	Se obtiene una curva aproximada para *h* a partir de: – los signos, ceros y unos, – se realiza la prueba por la simetría de la curva, se construye el eje y se identifican los puntos simétricos, – La gráfica para h que se obtiene es razonable.	Además: – se introduce el problema del vértice pero es el profesor quien desarrolla dicha técnica en el pizarrón. Mejoran las características de la gráfica de *h*.	Además: – se agregan múltiplos de la unidad, – los estudiantes construyen el vértice a partir de triángulos semejantes y realizan una generalización de dicha técnica para cualquier punto de la curva, – se construye una gráfica muy precisa para *h*.
Nivel topogenético	Los estudiantes construyen una gráfica para *h* basada principalmente en la identificación de los puntos notables. El profesor gestiona las discusiones que se fueron generando en el proceso de reconstrucción de las respuestas al problema.	Además: Los alumnos plantean la necesidad de construir el vértice de la parábola. El profesor realiza dicha construcción y el lugar del alumno queda reducido a la reproducción de dicha técnica.	Además: Los estudiantes resuelvan el problema de la construcción geométrica del vértice. Además proponen una generalización de la técnica construida para cualquier punto de *h*.
Nivel cronogenético	Se produce una dilatación en el tiempo reloj porque cambian completamente las características de *h*. La prueba de la simetría requiere de una permanencia en el problema.	Además: Aun cuando el profesor introduce la construcción del vértice, los estudiantes necesitan de un tiempo de reflexión, para poder reproducirla.	Además: La construcción del vértice de *h* y las discusiones generadas en torno a esta construcción requiere de una prolongación del "tiempo reloj".

Las diferencias entre las distintas implementaciones, además de las modificaciones en el *medio* que son introducidas por los estudiantes y, en el último año, por el profesor, se dan en las características para alcanzar la construcción del vértice. En el primer año esta construcción no se introduce al *medio* porque el profesor no consideró posible que los estudiantes pudieran obtenerla y estos no lo colocan como un problema relevante (fenómeno de la subestimación de los alumnos). En el segundo año son los alumnos los que introducen este problema, pero el profesor cede parcialmente a ellos el espacio para que puedan construirlo, porque finalmente acaba desarrollando la construcción y a los estudiantes sólo les quedó la posibilidad de reproducir esa técnica en otros casos. En las últimas dos implementaciones, el problema de la construcción del vértice es una pregunta más a la que hay que responder y esto permite identificar diferencias muy significativas respecto de las implementaciones anteriores con relación al vértice y a la generalidad de la técnica para construir cualquier punto de la curva.

Para abordar el problema de la construcción del vértice en el tercer año, la clase discutió qué resultados se ajustan más a la respuesta del problema. Este análisis da lugar a los estudiantes a explicitar la técnica que permite calcular la multiplicación entre dos segmentos en cualquier abscisa, pero inicialmente se resuelve el problema de la construcción del vértice en el eje de simetría. Se generaron discusiones relativas a las posiciones de los segmentos de las rectas y la unidad, cuestión que se termina resolviendo por recurrencia al análisis de signos. En las últimas dos implementaciones no sólo los estudiantes realizaron diferentes construcciones hasta obtener una representación del vértice, sino que además en esta misma situación también proponen una generalización de la técnica obtenida, que permite construir el valor de h para cualquier abscisa que se quiera calcular.

El protocolo correspondiente al estudiante A140 muestra los resultados que es posible construir a partir de esta situación. Este estudiante identifica los signos, ceros, unos, realiza la prueba por la simetría y también la construcción del vértice. Para obtener la representación gráfica que ha denominado h_2, como consecuencia del problema introducido por el profesor para analizar las propiedades de los ceros, construye todos los puntos y no es necesario construir el vértice porque los ceros de las rectas son coincidentes. Obtiene como consecuencia otros puntos a partir de la generalización de la técnica construida para el vértice de h cuando los ceros de las rectas son distintos. Este estudiante como muchos otros, aumentan la cantidad de puntos seguros a partir de la técnica construida, y su certidumbre de obtener una gráfica más precisa para h. Los resultados obtenidos por este estudiante se presentan en la Figura 3 a continuación.

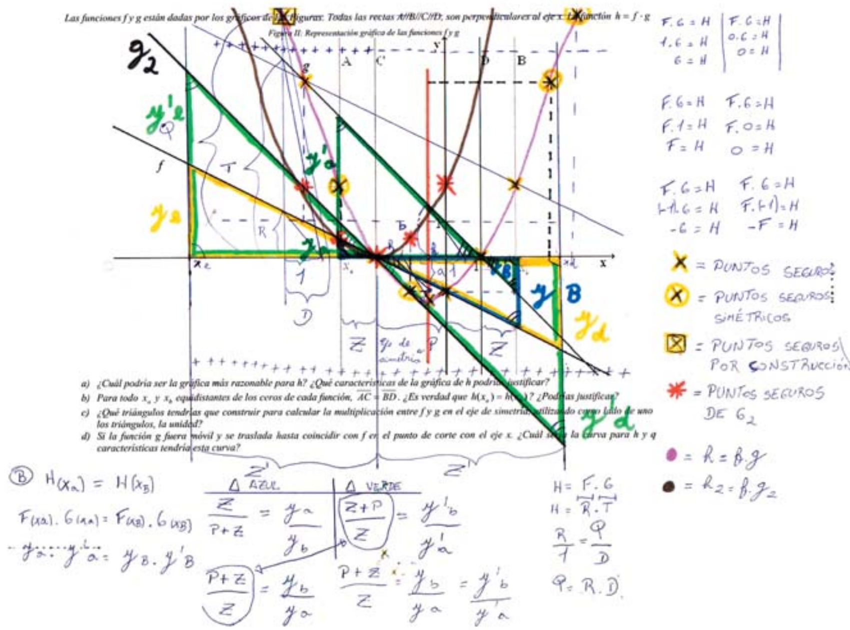


Figura 3: Protocolo correspondiente al alumno A140. Implementación 6 (Año 3)

Como puede interpretarse a partir de la Figura 3, este alumno construye todos los puntos notables de las curvas que él ha denominado h y h_2 respectivamente.

Para nuestra investigación ha resultado importante que se considere el trabajo con la técnica del vértice, y la generalización para cualquier punto que se quiera construir (como así también el análisis de los signos e identificación de puntos seguros) dado que se vuelve fundamental para el desarrollo de otros recorridos que podrían derivarse de la cuestión Q_0, sobre todo porque este problema fue introducido por clase, como una necesidad de encontrar sentido a este punto notable; y no como una imposición del profesor.

4.4. *Situación 3*

Se introduce en los dos primeros años el problema de la multiplicidad de los ceros; mientras que en el último este aspecto ya ha sido tratado, pero igualmente es propuesto por el profesor para analizar otros casos de parábolas con ceros coincidentes; y más en particular en el origen de coordenadas. Se analizan las características de la gráfica de h con dos ceros reales iguales. En esta situación el vértice de la parábola coincide los ceros de las rectas. En todas las implementaciones los estudiantes continúan identificando los signos y los puntos posibles de construir a partir de la información que proporciona la situación. Las diferencias por cada año de implementación se dan por la cantidad de puntos que se construyen, a partir de los cuales se obtiene una representación más o menos aproximada para *h*. A partir de los niveles *cronogénesis*, *mesogénesis* y *topogénesis*, se detallan en la tabla iii las diferencias entre los distintos años de implementación para esta situación que introduce el problema de las parábolas con dos ceros reales iguales.

TABLA III
Descripción de la *cronogénesis*, *mesogénesis* y *topogénesis* de la Situación 3 por cada implementación

Situación 3			
Implementación / Niveles	*Año I Implementaciones 1 y 2*	*Año II Implementaciones 3 y 4*	*Año III Implementaciones 5 y 6*
Nivel mesogenético	Para obtener *h* construyen: – los ceros y los unos, – prueban la simetría, representan el eje y marcan los puntos simétricos, – el vértice de *h* que coincide con los ceros de las rectas. La gráfica que obtienen es aproximada.	Además: – Construyen los múltiplos de la unidad. Mejoran las características de la representación gráfica de *h*.	Además: – Se agregan múltiplos de la unidad, – construyen otros puntos a partir de la generalización de la técnica geométrica construida para el vértice, – se construye una gráfica muy precisa para *h*.
Nivel topogenético	Los estudiantes construyen una gráfica aproximada para *h* basada principalmente en la identificación de los puntos notables. El profesor gestiona las discusiones dadas en el medio como proceso de generación de las respuestas.	Además: Los alumnos plantean la necesidad de construir otros puntos, los múltiplos de la unidad para mejorar *h*. El profesor lo permite.	Además: Los estudiantes introducen el problema de obtener otros puntos por la generalización de la técnica geométrica del vértice.
Nivel cronogenético	La prueba de la simetría requiere de una permanencia en el problema. Los demás puntos y características de *h* se obtienen pronto y sin dificultad.	Además: La construcción de otros puntos y la necesidad de obtener una gráfica aproximada dilata el tiempo reloj.	Además: La construcción de la técnica geométrica produce una dilatación del tiempo reloj.

En el protocolo A129 correspondiente a la Figura 4, se interpreta la importancia de la técnica construida por los estudiantes en las últimas dos implementaciones, en principio para la obtención del vértice de la parábola que luego fue generalizada para cualquier punto que se quiera obtener. Este alumno logró identificar no sólo los puntos notables: ceros y unos; sino que pudo agregar por construcción cuatro puntos más que le permitieron mejorar las características de la gráfica de *h*, utilizando la construcción generada para el vértice, en otros puntos. Además, como puede interpretarse en la figura, también propone una generalización para la prueba de la simetría de la curva; analizando qué es lo que ocurre en diferentes puntos que se encuentran a igual distancia de los ceros. A diferencia de los resultados obtenidos en los años anteriores, este estudiante obtiene una representación gráfica para *h* bien aproximada.

El inicio del recorrido dado por las tres situaciones antes analizadas, permitió introducir las características de la representación gráfica de las funciones polinómicas, de segundo grado, de una manera que se aparta de la habitual. La generatividad de la cuestión inicial propuesta en el REI, planteada en los dominios geométrico, gráfico y funcional; da sentido a los puntos notables de la parábola y a las características generales de la representación gráfica de dicha función.

Además de los resultados obtenidos a partir de las tres primeras situaciones que abordan el problema de la multiplicación geométrica de las curvas, el REI avanza hacia el estudio de las características de las representaciones analíticas, partiendo del hecho de que siempre se multiplican rectas. Se analizan en estas situaciones las vinculaciones que pueden establecerse entre las técnicas analíticas y las características de la gráfica cuando se conoce la expresión algebraica de la función, con las técnicas geométricas obtenidas en la primera parte del recorrido.

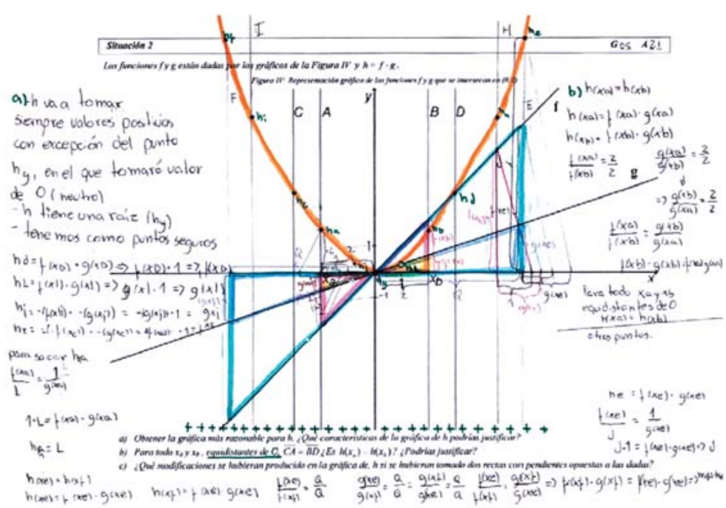


Figura 4: Protocolo correspondiente al alumno A136. Implementación 5 (Año 3)

El análisis y el alcance del recorrido propuesto puede ser descrito por las funciones didácticas *mesogénesis*, *topogénesis* y *cronogénesis*. Los resultados desarrollados en este trabajo permiten interpretar que son estas funciones las que regulan un REI, pues entre los tres años de implementación considerados para realizar el estudio, las principales diferencias se dan en las decisiones consideradas en el nivel de la *topogénesis* y en las cuestiones que se introducen al *medio* y se desarrollan. Las diferencias entre los distintos años de implementación identificadas, no pueden atribuirse a las características de la muestra en cada caso. Los grupos de estudio son similares, el profesor ha sido el mismo en todas las implementaciones; y por lo tanto las modificaciones en las características del recorrido son consecuencia de las decisiones en los niveles considerados.

5. Conclusiones

La inserción de un REI en contextos experimentalmente controlados, permite justificar las ventajas de una enseñanza basada en preguntas en lugar de respuestas. El recorrido generado por la multiplicación geométrica de las rectas ha permitido construir una representación gráfica de la parábola, justificando cada punto notable, y también analizando las diferencias entre las distintas representaciones que se obtienen. Un aspecto destacable es la posibilidad de construir el vértice de la parábola y justificar la simetría de la curva, que en la enseñanza tradicional son una imposición; mientras que en el REI son objeto de construcción. El retorno a la geometría resulta insoslayable por las características de las preguntas desarrolladas en el REI para construir dichas pruebas. En este trabajo sólo se han descrito los resultados de las primeras situaciones del REI que permite reconstruir la representación gráfica de las funciones polinómicas de grado dos; pero a lo largo del recorrido se reconstruyen las demás características de dicha OM.

Las decisiones tomadas en el *nivel topogenético*, se orientaron a superar los obstáculos que se generaron, sobre todo al inicio, porque el profesor en una enseñanza por REI abandona su papel de "explicador". Al inicio los estudiantes rechazaban el "corrimiento" del papel del profesor del lugar de único responsable de la actividad. Ha sido también una dificultad para el docente asumir su papel de director del estudio, aceptando que es el grupo de clase el que decide el curso de acción; resultado que se refleja en el análisis, considerando el primer año de implementación respecto del tercero. En el REI el profesor es un media más, y es el responsable de presentar una "buena pregunta" que desencadena todo un proceso de estudio. Sin embargo, la relación de los estudiantes de secundaria con la generación de otras cuestiones suele ser muy débil, y la investigación muestra que esto puede modificarse progresivamente y tornarse una actitud más o menos asumida por ellos.

Las decisiones adoptadas en el *nivel topogenético* tienen gran influencia en la ecología del REI, debido a su estrecha vinculación con el proceso *mesogenético*: ¿qué es lo que se modificó entre las implementaciones del primer y tercer grupo, al punto de lograr la generación de un *medio* mucho más rico y de respuestas mucho más elaboradas por los alumnos? No se trata de variaciones atribuibles a la inteligencia de los últimos grupos con respecto a los primeros, pues la distribución de los estudiantes en los cursos era igualmente azarosa. La pregunta y su generatividad tampoco cambiaron, lo que se modificó fueron las decisiones que el profesor tomó para dejar más espacio a los alumnos. Esto hizo posible el enriquecimiento del *medio* y la construcción de una respuesta validada a partir de los instrumentos de la clase:

- En el primer año de implementación el profesor gestionó en exceso el recorrido, impidiendo a los estudiantes progresar en los resultados que fueron obteniendo. Así se obtuvo una gráfica para *h* no muy aproximada, a tal punto que el vértice fue el resultado de una inferencia escasamente validada.
- En el segundo año, los estudiantes plantearon el problema de cómo obtener el vértice de la parábola, pero fue el profesor quien decidió realizar la construcción y los alumnos reprodujeron esa técnica; obteniendo una gráfica aproximada.
- En las dos últimas implementaciones, el profesor incluye la pregunta por el vértice y deja a los alumnos resolver el problema, porque de hecho los elementos para hacerlo estaban en el medio. Esto les permitió realizar una generalización de la técnica para obtener geométricamente cualquier abscisa de *h*.

Las diferencias entre los resultados obtenidos son consecuencia de las decisiones adoptadas en los niveles *mesogenético* y *topogenético.* Se destaca la modificación de la actitud de los estudiantes con relación al saber, principalmente en lo que respecta a la búsqueda de respuestas a preguntas para ellos desconocidas, introducidas generalmente por el profesor. El hecho de aceptar siempre las preguntas y estudiar posibles respuestas es un indicador de cambio.

Aunque por las características del REI y del contexto no se ingresa plenamente en la *pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo,* con limitaciones, se logra introducir algunos gestos auspiciosos. Como se evidencia en los protocolos, el desarrollo de una enseñanza basada en preguntas ha sido posible y positivo, así como la construcción de respuestas por parte de los estudiantes ha resultado contundente. Es un paso pequeño pero muy prometedor, que invita a seguir intentando hacer vivir las actitudes de la pedagogía de la investigación toda vez que sea posible.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 7-30.

Bagni, G. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(1), 5-23.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 339-352.

Chevallard, Y. (1985*). La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Paris, Francia: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. *Journées de didactique comparée 2004*, Ecole normale supérieure de Lyon, Lyon, Francia. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. En L. Ruiz–Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén, España: Universidad de Jaén. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. IUFM Toulouse, Francia. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2011). Quel programme pour l´avenir de la recherche en TAD? En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G…, M. Larguier (Eds), *Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico. Un panorama de la TAD*, Vol 1. (pp. 23-32). Cataluña, España : Centre de Recerca Matemàtica. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2013). Journal du Seminaire TAD/IDD. *Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement*. 'Universtité *d'Aix-Marseille,* Aix-en-Provence y Marsella, Francia. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-5.pdf.

Corica, A. y Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 305-331.

Corica, A. y Otero, M. (2012). Estudio sobre las praxeologías que se proponen estudiar en un Curso Universitario de Cálculo. *Boletim de Educação Matemática, 26*(42B), 459-482.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet Dans l´enseignement des mathématiques: une réalisation dans tout le cursus primaire.* (Thèse de doctorat d´Etat non publiée). Université Paris VII, París, Francia.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-32.

Douady, R. (1999). Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16). *European Research in Mathematics Education I: Group 1*. University Paris 7, Paris, France.

Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: "continuidad y prototipos". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(2), 207-230.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(1), 9-33.

Ferrari, M. y Farfán, R. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3), 309-354.

Fonseca, C. y Casas, J. M. (2009). El paso de estudiar matemáticas en Secundaria a la Universidad y los REI. En A. Salvador Alcaide (Ed.) *Jornadas Internacionales de Didáctica de las Matemáticas en Ingeniería*, (pp. 119-144). Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid. Disponible en: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/JORNADAS%201/110%20recorridoestudioinvestigacion.pdf.

Fonseca, C., Pereira, A. y Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, *23*(1), 97-121.

García, F., Bosch, M., Gascón, J. y Ruiz Higueras, L. (2005). Integración de la proporcionalidad escolar en una Organización Matemática Regional en torno a la Modelización funcional: los planes de ahorro. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (pp. 1-14). Jaén, España: Universidad de Jaén. Disponible en :* http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Garcia_Bosch_Gascon_Ruiz.pdf.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 129-159.

Gascón, J. (2011). Tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 203-231.

Gazzola, M. P., Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2013). Research and Study Paths in the Teaching of Mathematics at Secondary school relative to the Rational Functions. *Journal of Arts & Humanities*, *2*(3), 109-115.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 5-21.

Ladage, C. y Chevallard, Y. (2011). Enquêter avec l'Internet. Études pour une didactique de l'enquête. *Éducation & Didactique*, 5(2), 85-115.

Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2012). Las funciones polinómicas de segundo grado en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI): alcances y limitaciones. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *31*, 45-63.

Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2013a). La pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde: une étude longitudinale dans l'école secondaire argentine *Review of Science, Mathematics and ICT Education. Re SM TICE, 7*, 1, 27-46.

Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2013b). Operaciones con curvas y estudio de funciones. *SUMA, 73*, 17-24.

Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2013c). The Research and Study Paths in the secondary school: the case of the polynomial functions of the second degree. *Problems of Education in the 21st Century*, *52*(52), 60-71.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(2), 215-226.

Otero, M. R. y Banks Leite, L. (2006). Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 151-178.

Otero M. R., Llanos, V. C. y Gazzola, M. P. (2012). La pedagogía de la investigación en la escuela secundaria y la implementación de Recorridos de Estudio e Investigación en matemática. *Revista Ciencia Escolar: enseñanza y modelización, 1*(2), 31-42.

Parra, V., Otero, M. R. y Fanaro, M. (2013). Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Escuela Secundaria: resultados de una implementación. *Boletim de Educação Matemática*. 27(47), 847-874.

Sánchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 65-97.

Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Cómo hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. En Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action.* (pp. 1-17). Montpellier, Francia: Université de Montpellier Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm.

Autores

Viviana Carolina Llanos. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As. Tandil, Argentina. (CONICET) vcllanos@exa.unicen.edu.ar

María Rita Otero. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As. Tandil, Argentina. (CONICET) rotero@exa.unicen.edu.ar