ÁLGEBRA: ENTRE EL HACER MATEMÁTICO Y EL PENSAR MATEMÁTICA

Raquel Andreoni, Julieta Bracone, María Teresa Coronel,
Romina Formento, Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", Argentina.
randreoni66@gmail.com, julietabracone@gmail.com, coronelmarite@gmail.com,
romformento@gmail.com, patricialeston@gmail.com, romformento@gmail.com

RESUMEN

El desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela media fue perdiendo su relevancia por distintas razones. Se entiende que para poder fortalecer esta habilidad, se necesita una mejor comprensión sobre la potencialidad del álgebra y el trabajo matemático. En este artículo se intentan exponer algunos de los motivos por los cuales este proceso podría ser positivo para mejorar la clase y lograr una mejor conceptualización por parte del alumno, apartando la idea de que el álgebra se reduce a la aplicación de procedimientos vacíos de contenido, al estilo del trabajo algorítmico, presente en nuestras aulas.

PALABRAS CLAVE: pensamiento algebraico, actividad matemática, rediseño

INTRODUCCIÓN

La introducción al álgebra en la escuela secundaria debería suponer para los alumnos un cambio en la forma de hacer matemática, que abarca: las formas de abordar los problemas, la exploración, la formulación y validación de conjeturas, la coordinación de diferentes registros de representación semiótica y el tratamiento de lo que es general frente a una situación o a un problema. El álgebra, como rama del conocimiento matemático, requiere un cambio en el pensamiento del estudiante.

En el presente artículo nos proponemos precisar algunos de los objetivos del trabajo algebraico en el aula, pensando en la necesidad de modificar su enfoque actual, donde mucho del trabajo que se realiza queda reducido a procedimientos algorítmicos vacíos de significación para el estudiante. Podemos mencionar en el sentido de Gascón (2011) que esta tarea a la que habitualmente se enfrentan nuestros estudiantes lleva a una aritmetización del álgebra escolar.

Cuando hablamos de trabajo algebraico debemos valorar las implicaciones que tiene la posibilidad de generalizar estructuras y relaciones, lo cual produce un desarrollo importante de la matemática como lenguaje descriptivo. Entrar en las prácticas de generalización que supone el trabajo matemático, requiere una intencionalidad específica, debido al esfuerzo que representa para el alumno.

Esto implica también que el docente debe cuestionar de su parte el diseño de nuevas actividades para modificar el tipo de propuestas del discurso matemático escolar. El desarrollo de las habilidades necesarias para poder llegar a la generalización demanda una construcción de actividades específicas por parte del docente, en las cuales la generalización, que no se logra como resultado de algunas actividades aisladas; surge del trabajo sobre todo el contenido de una currícula que debe apoyar la construcción de este tipo de pensamiento y sostenerlo en el tiempo.

No se plantea en este trabajo que el aspecto técnico dentro de la actividad algebraica debe dejar de estar presente, dado que es necesario tener ciertas habilidades mecánicas de tratamiento de expresiones para poder conseguir las destrezas previamente mencionadas.

El centro de la cuestión es la relación entre el tipo de tarea que se le propone al alumno, a veces mecánica y a veces de desarrollo, para que la conceptualización matemática que de ese tipo de tarea se obtiene no se pierda detrás del manejo algorítmico.

Desde esta perspectiva nos proponemos repensar el trabajo algebraico en la escuela y el discurso matemático escolar asociado a éste e identificar las dificultades que se plantean en el aula, recuperando el álgebra como lenguaje que promueve la actividad modelizadora y como generadora de una estructura de pensamiento propia e inherente del quehacer matemático.

ALGUNOS EJEMPLOS DE PROBLEMÁTICAS ASOCIADAS A LA ARITMETIZACIÓN DEL ÁLGEBRA

Esta investigación está siendo llevada a cabo por un grupo de docentes que se desempeña en distintas escuelas, y que coinciden en el reconocimiento de que, en la mayoría de las escuelas por donde transitamos, el tratamiento que se da a la actividad algebraica es principalmente algorítmico, lo cual no permite una construcción de significado de lo que se está haciendo ni de lo que es el sentido de la existencia del álgebra.

Evidencias de esto son fácilmente detectables en las prácticas escolares. A continuación, y sólo a modo de ejemplo, se presentan algunas de las tareas algebraicas más tradicionales que han ido convirtiéndose en tareas meramente algorítmicas o aritméticas:

Regla de Ruffini para la división de polinomios

En la mayoría de los casos, puede observarse que los alumnos aplican un mecanismo para dividir polinomios sin saber que están efectuando una división (en el sentido más amplio de la palabra). Asumimos que este hecho dificulta la comprensión, por ejemplo, de: por qué tienen que completar y ordenar el polinomio dividendo; por qué colocan la raíz del polinomio divisor; por qué el polinomio cociente tiene un grado menos que el dividendo; y por qué el último número obtenido es el resto de la división.

Podemos suponer que éste es uno de esos casos donde la actividad carece de sentido para los alumnos. La tarea que se desarrolla sólo involucra la aplicación del algoritmo, aislado y que por sí mismo justifica su existencia. Si bien el trabajo con polinomios resulta ser de difícil vinculación con situaciones problemáticas de la vida cotidiana, los problemas que dan significado a los conceptos matemáticos no tienen por qué ser sobre cuestiones de la realidad, pero sí tienen que ser significativas para los alumnos en el sentido de Ausubel (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983).

Construimos significados cada vez que somos capaces de establecer relaciones “sustantivas y no arbitrarias” entre lo que aprendemos y lo que ya conocemos. Así, la mayor o menor riqueza de significados que atribuiremos al material de aprendizaje dependerá de la mayor o menor riqueza y complejidad de las relaciones que seamos capaces de establecer. (Coll, 1988).

Como consecuencia de este tipo de trabajo centrado en la técnica los alumnos pierden la posibilidad de generar estrategias de control sobre su propia producción, por no poder hacer referencia a alguna significación de aquello que manipulan. (Papini, 2003)

Resolución de ecuaciones (métodos de resolución de sistemas de ecuaciones)

Los alumnos de escuela secundaria generalmente conocen la técnica de “despeje de ecuaciones”, como el pasaje de un lado al otro de la igualdad de cada término con la operación inversa pero no saben por qué ese mecanismo funciona al momento de poder determinar el valor de una incógnita.

En el caso particular de los sistemas de ecuaciones, el método gráfico y la posibilidad de pensar a las ecuaciones lineales como rectas que pueden intersecarse determinando una solución que funciona para ambas condiciones, implica el tratamiento del pasaje de la letra como incógnita a la letra como variable, que no se discute ni aparece en el discurso matemático escolar. Sin embargo, se espera que esa abstracción surja de manera natural de la actividad repetitiva que se propone a los alumnos.

En muchos casos los estudiantes tratan las letras de expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como números generalizados o como variables. Según Kieran y Filloy (1989), Harper (1981) sugiere la existencia de etapas en la comprensión de un término literal como variable, y señala que los estudiantes usan los términos literales mucho antes de que sean capaces de conceptualizarlos como variables, esto es, de percibir lo general en lo particular.

En un experimento de enseñanza diseñado específicamente para favorecer la adquisición de la noción de letra como número generalizado, Booth (1982,1983) encuentra una fuerte resistencia por parte de los alumnos a asimilar esta parte del álgebra. Booth sugiere que "la obtención de este nivel de conceptualización está relacionada con el desarrollo de estructuras cognitivas de orden más alto"(Kieran y Filloy, 1989, p. 231)

Fórmulas de área y perímetro

Encontramos a diario en nuestras escuelas que los estudiantes saben trabajar sobre las figuras de la geometría plana con valores numéricos pero no pueden construir la fórmula a partir de la generalización de un proceso de cálculo. Por ejemplo, después de calcular el perímetro de varios cuadrados pueden llegar a observar que en vez de sumar 4 veces la medida del lado, pueden multiplicar éste por 4, teniendo el valor numérico pero no llegan a generalizar que la fórmula es $4 \times L$, ni son capaces de reconocer que la fórmula simplifica el trabajo posterior, para todos los cuadrados con los que se enfrenten.

La racionalidad matemática que se requiere en las prácticas algebraicas es muy diferente a las que empleaban en sus prácticas aritméticas, dado que supone una ruptura cognitiva esencial. La introducción de las letras, por las implicancias que tiene en las posibilidades de generalización, produce una ampliación indefinida de la potencia de la matemática. El problema para los estudiantes es que el esfuerzo que implica el poder generalizar para poder llegar al final de la actividad es mucho mayor que el que implica resolver una ecuación u otra actividad más algorítmica y pierden dimensión de la riqueza del proceso.

El hecho de que el uso del álgebra permite conservar la estructura de los cálculos, permite poner en evidencia relaciones que se pierden en la obtención de un único resultado cuando se opera con números (Papini, 2003).

En el caso de las superficies ocurre algo parecido: los estudiantes no logran deducir las fórmulas a partir de descomposición de figuras. Esto se debe no sólo a que no tienen manejo geométrico sino también a que la operatoria con fórmulas les resulta desconocida, aún cuando ya hayan trabajado con formulaciones algebraicas previas.

Construcción de la fórmula de un modelo lineal, cuadrático, exponencial

El trabajo escolar, en torno a los modelos lineales, se centra principalmente en la construcción de tablas a partir de una fórmula dada. Este tipo de actividad dificulta a los alumnos el desarrollo de habilidades que le permitan, por ejemplo, modelizar una situación concreta mediante una fórmula. La misma situación se repite para los distintos tipos de modelos matemáticos.

Construir un modelo requiere establecer un cierto número de relaciones entre las variables tenidas en cuenta. El modelo es el conjunto de estas relaciones. La principal dificultad que enfrentan los estudiantes cuando encuentran este tipo de actividad reside en la complejidad de poder observar esas relaciones. El desarrollo de la capacidad que los alumnos tienen que lograr implica una tarea muy ardua para los docentes, quienes deben repensar su práctica en este sentido, no desde los contenidos sino desde las actividades que se proponen a los estudiantes.

Forma de ver el signo igual

La mayoría de los alumnos que comienzan con el álgebra tienen la idea de que el signo igual es la "señal de hacer algo" antes que un símbolo que puede representar, por ejemplo, la equivalencia entre los miembros izquierdo y derecho de una ecuación.

Por otro lado, las propiedades definidas por igualdades no son comprendidas como verdades que se cumplen para todo valor de la literal y en consecuencia para casos numéricos particulares. Por ejemplo, para el caso del cuadrado de un binomio, los estudiantes saben la fórmula pero no reconocen que funciona para cualquier caso, por ejemplo, $(3+4)^2= 3^2+2.3.4+4^2$.

El significado y el sentido del símbolo igual y el uso que se le da en los distintos contextos en que aparece debe también ser objeto de construcción en el escenario escolar, justamente para evitar este tipo de conflictos.

La abstracción y lo simbólico de la matemática aparecen entonces como los generadores de conflictos. Sin embargo, el planteo que hacemos busca trascender la identificación de aquello que genera dificultades. Lo que intentamos es pensar en las prácticas asociadas a lo que se hace en la escuela. ¿Para qué utilizamos el álgebra? ¿Para qué queremos que nuestros alumnos puedan generalizar propiedades? ¿Por qué hablamos de la necesidad de dotar de significado a los conceptos matemáticos que llevamos a las aulas?

Entendemos que lo que la escuela debe hacer es propiciar la construcción de una manera matemática de pensar. Y para poder pensar es necesario poder comunicarse con otros; y depende de la actividad que llevemos al aula el tipo de pensamiento y comunicación que se dé. Como plantean Cordero y Silva (2003), “la matemática educativa interpreta y estudia fenómenos vinculados a la construcción de este conocimiento en los diferentes planos de la sociedad, tales como el escolar y la cotidianidad, con la expectativa de que este conocimiento transforme la vida de los ciudadanos” (p. 299).

NECESIDAD DE RESIGNIFICAR EL ÁLGEBRA

Lo que se presenta en el apartado anterior no resulta de una mirada ingenua de la realidad, existe detrás de esta mirada, de estas reflexiones, una teoría que sostiene la necesidad de hacer de la actividad escolar una tarea que redunde en beneficios para los estudiantes, y como consecuencia, para la sociedad.

En este caso, estamos ubicados en una mirada socioepistemológica de la construcción de conocimiento matemático, entendiendo que “la matemática es producto de siglos de historia, la cual es afectada por transformaciones y progresos epistemológicos, y como tal, es construida socialmente como fruto de necesidades , usos, situaciones o experiencias vividas por los grupos humanos” (Cordero y Silva, 2003, p. 306).

De acuerdo a lo planteado hasta aquí, es necesario que nos cuestionemos los motivos por los cuales entendemos que se debe rediseñar el discurso matemático escolar en lo que se refiere al pensamiento algebraico. De acuerdo a lo que algunos autores sugieren (Papini, 2003; Godino y Font, 2003), existen evidencias de la importancia de resignificar el álgebra de la escuela secundaria.

- Si se considera que en el álgebra encontramos una herramienta de generalización de la aritmética, propiciamos un mayor alcance de abstracción para nuestros alumnos. El trabajo con números implica una primera abstracción, dado que los números son símbolos primarios (abstracciones de lo que antes eran conjuntos con igual cantidad de elementos); y el trabajo algebraico en el cual los símbolos numéricos son reemplazados por símbolos literales; implica una abstracción de orden superior. Una vez en ese plano, el alumno puede descontextualizar el símbolo del valor individual que lo generó y operar con conceptos en lugar de con valores. (Papini, 2003)

- El álgebra es, en gran parte, el idioma en que se escriben las relaciones de los objetos matemáticos; y es por ello que resulta imprescindible que un alumno pueda utilizarlo de manera natural, y entienda lo que se afirma “matemáticamente hablando”. A medida que los contenidos se complejizan, lo algebraico debe dejar de ser un obstáculo. (Godino y Font, 2003)

- La matemática se concibe escolarmente como una herramienta para construcción de pensamiento, pero también como herramienta para el desarrollo de otras disciplinas. Dentro de la construcción de esta mirada, cabe mencionar a la modelización como mecanismo de resolución de problemas. El álgebra lo que va a permitir es que esos modelos que ayuden a resolver los problemas sean generales y manipulables, al mismo tiempo de ser comunicables y entes sobre los cuales podemos argumentar (Arrieta, 2003).

Podemos agregar a esto, además, la potencialidad del uso del álgebra para la construcción de una mirada más científica de la tarea escolar (Polya, 1945). Si pensamos en la búsqueda de modelos o de reglas generales de formación de los términos de una sucesión, entendemos que es a través de la inducción que el alumno puede lograr la mencionada construcción. Y es esa la manera en que los científicos inician el desarrollo de sus ideas e hipótesis: en la abstracción general de un comportamiento repetido que se observa en una experiencia.

ALGUNAS IDEAS PARA DESARROLLAR EN LA ESCUELA MEDIA

En este apartado no se pretende brindar ningún tipo de “receta mágica” para su implementación en el aula. La enseñanza del algebra a través de su uso implica, principalmente, cambios en la práctica cotidiana del profesor.

En primer lugar, la autoridad intelectual que el profesor, o libro de texto, posee debe estar orientada a la interacción docente - estudiantes a partir de las formas de razonamiento que ellos - los alumnos- desarrollen, en lugar de comenzar un tema exponiendo reglas, definiciones y ejemplos. Este cambio puede notarse por ejemplo en incentivar la argumentación en base a la lectura de fórmulas y la información que nos brinda anteponiendo esta metodología a la resolución algorítmica, que es a la que primero se apunta.

En segundo lugar, deberíamos propiciar debates en donde el alumno pueda apreciar la potencialidad del algebra, por ejemplo, para detectar la forma más económica de resolver una situación.

A continuación presentamos algunos ejemplos de nuestra práctica cotidiana. En las figuras 1 y 2, se les pide a los alumnos que encuentren, si existe, el intervalo solución de $\frac{2x-1}{-3(x+1)^2} \geq 0$, si existe.

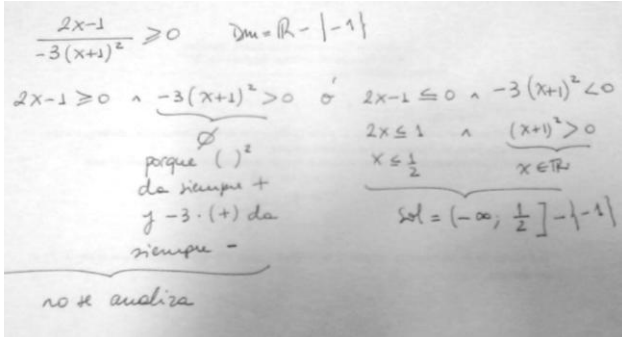


Figura 1
Resolución de una inecuación racional realizada por un alumno B

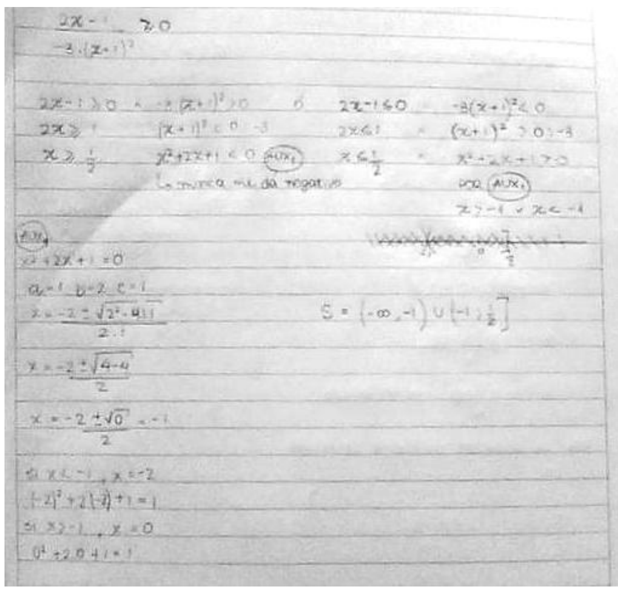
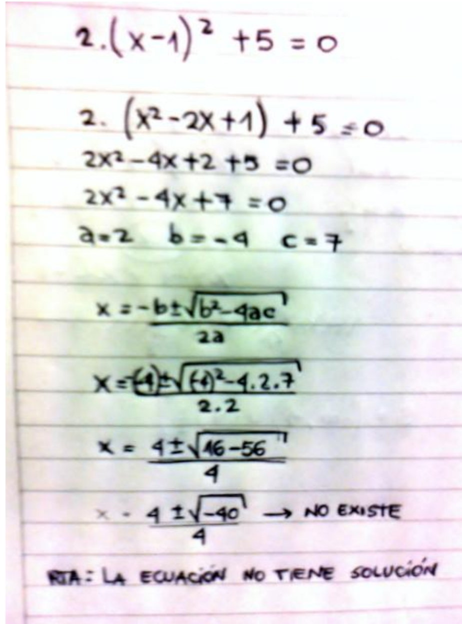


Figura 2
Resolución de una inecuación racional realizada por un alumno A

Las figuras 3 y 4, ejemplifican la resolución realizada por dos alumnos al pedirles que decidan si la ecuación propuesta tiene solución.



$2.(x-1)^2+5=0$

$2.(x^2-2x+1)+5=0$

$2x^2-4x+2+5=0$

$2x^2-4x+7=0$

$a=2 \quad b=-4 \quad c=7$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

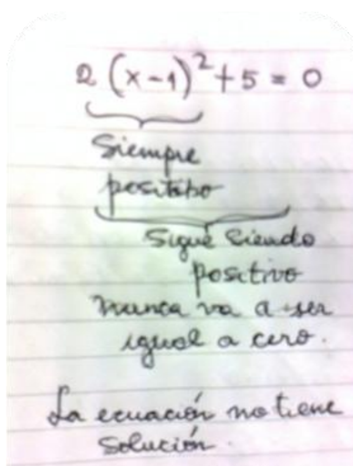
$x=\frac{\boxed{-(-4)}\pm\sqrt{(-4)^2-4.2.7}}{2.2}$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-56}}{4}$

$x=\frac{4\pm\sqrt{-40}}{4} \rightarrow$ NO EXISTE

RTA: LA ECUACIÓN NO TIENE SOLUCIÓN

Figura 3
Argumentación propuesta por el alumno A



$\underbrace{\underbrace{2(x-1)^2}_{\text{Siempre positivo}}+5}_{\text{Sigue siendo positivo}}=0$

nunca va a ser igual a cero.

La ecuación no tiene solución.

Figura 4
Argumentación propuesta por el Alumno B

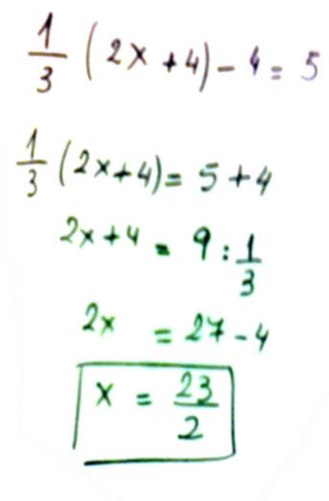


Figura 5
Resolución de una ecuación lineal por el Alumno A

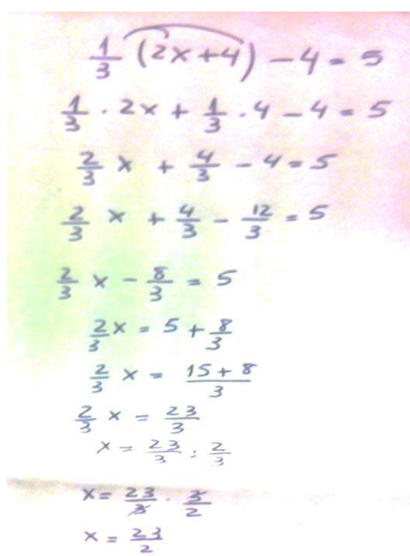


Figura 6
Resolución de una ecuación lineal por el alumno B

Finalmente, en las figuras 5 y 6 puede observarse dos resoluciones diferentes de la ecuación $\frac{1}{3}\cdot(2x+4)-4=5$

En cada caso, las respuestas no son distintas, pero sí lo son las formas de enfrentar las actividades propuestas. ¿Cómo hacemos para que nuestros alumnos elijan con criterio qué procedimientos usar en cada caso? ¿Qué hacemos para mostrar que algunos métodos son "más económicos" que otros? Esa es la reflexión que intentamos proponer en este trabajo.

CONCLUSIONES

El discurso matemático escolar no sólo cumple la función de difundir saberes matemáticos y favorecer la formación de consensos, sino también, instaura procesos y mecanismos específicos que de alguna manera, regulan e incluso norman, el tipo de prácticas que los docentes desarrollan al interior de las aulas. En ese orden de ideas, consideramos que en los escenarios institucionales, las reformas educativas, los textos, los materiales didácticos en general y las interacciones entre profesores y alumnos, son elementos constitutivos del discurso matemático escolar.

Asumimos en consecuencia, que el discurso plantea una re-significación escolar de nociones, procedimientos y prácticas matemáticas, particularmente, al interior de las aulas, que requiere ser analizada, a fin de generar entendimiento sobre la forma en que se difunden y consensuan ciertos saberes matemáticos en la relación didáctica del día a día.

El aprendizaje de las herramientas del algebra necesita de situaciones especificas que implican la intervención del docente que las ofrezca como tales, si bien está claro que no es posible controlar todos los significados, pero si es posible la toma de conciencia de este fenómenos y la puesta en juego de reflexión y de explicación y que permitan acordar algunas nociones y convenciones hasta este momento implícitas.

Lograr que los estudiantes construyan el pensamiento algebraico con significado y no vacío de contenido es una meta que debemos perseguir, es fundamental el rol del docente en cuanto a impulsar el desarrollo de sus alumnos, en tanto que es quien decide el tipo de tareas a realizar en la clase. (Pappini 2003, p. 27).

Ser conscientes de que tenemos que ofrecer estas oportunidades en el aula, donde los alumnos logren poner en práctica procesos para manejar lo todavía desconocido; invertir y deshacer operaciones; ver lo general en lo particular, entre otros. Es el primer paso a seguir para que los estudiantes desarrollen, en el sentido de Love (1986), el pensamiento algebraico.

Esta evolución en el pensamiento algebraico contribuye al desarrollo del pensamiento del sujeto. Teniendo en cuenta las características propias de la actividad algebraica, como son la generalización de la aritmética y la posibilidad de descontextualizar el pensamiento, podemos afirmar que trabajar con las herramientas del álgebra genera procesos psicológicos superiores (Pappini, 2003). Tomando como punto de partida una de las principales críticas vigentes hacia el sistema educativo, centradas en la falta de formación de ciudadanos con pensamiento crítico y diversidad de criterios para la toma de decisiones, consideramos que la reformulación del discurso matemático escolar, es necesaria. Nuestra propuesta apunta a la labor docente más allá de los contenidos propuestos en la curricula, es decir a un cambio en el "cómo" y no en el "qué".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D.; Novak, J. D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa.* México: Trillas.

Coll, C. (1988). Significado y sentido en el aprendizaje escolar. Reflexiones en torno al concepto de aprendizaje significativo. *Infancia y Aprendizaje 41*, 131-142.

Cordero, F. y Silva, H. (2003). Matemática educativa, identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15 (3)*, 295-318

Godino J; Vicenç, F. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Recuperado el 15 de agosto de 2013 de: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/

Kieran C; Filloy Yagüe E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias 7 (3)*, 229-240.

Martínez Sierra, G. (2010). Los estudios sobre los procesos de convención matemática: una síntesis metódica sobre la naturaleza de sus resultados. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (4-II)*, 269-282.

Papini, M. C. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana Investigación en Matemática Educativa 6 (1)*, 41-71.

Polya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method.* Princeton: Princeton University Press.

Ruiz-Munzón N; Bosch M; Gascón J. (2011) Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. Recuperado el 20 de agosto de 2013 de: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/NoemiMariannaJosepCITAD-III-2011.pdf